

# 第五章：图像表达-边缘检测

---

授课老师：李厚强，胡洋，周文罡，李礼

# 图像表达内容提纲

## □ 图像表达：特征检测与匹配

- 边缘检测，关键点检测，特征描述，视觉预训练模型

如何构建相同场景  
或类别的图像之间的  
关联关系？





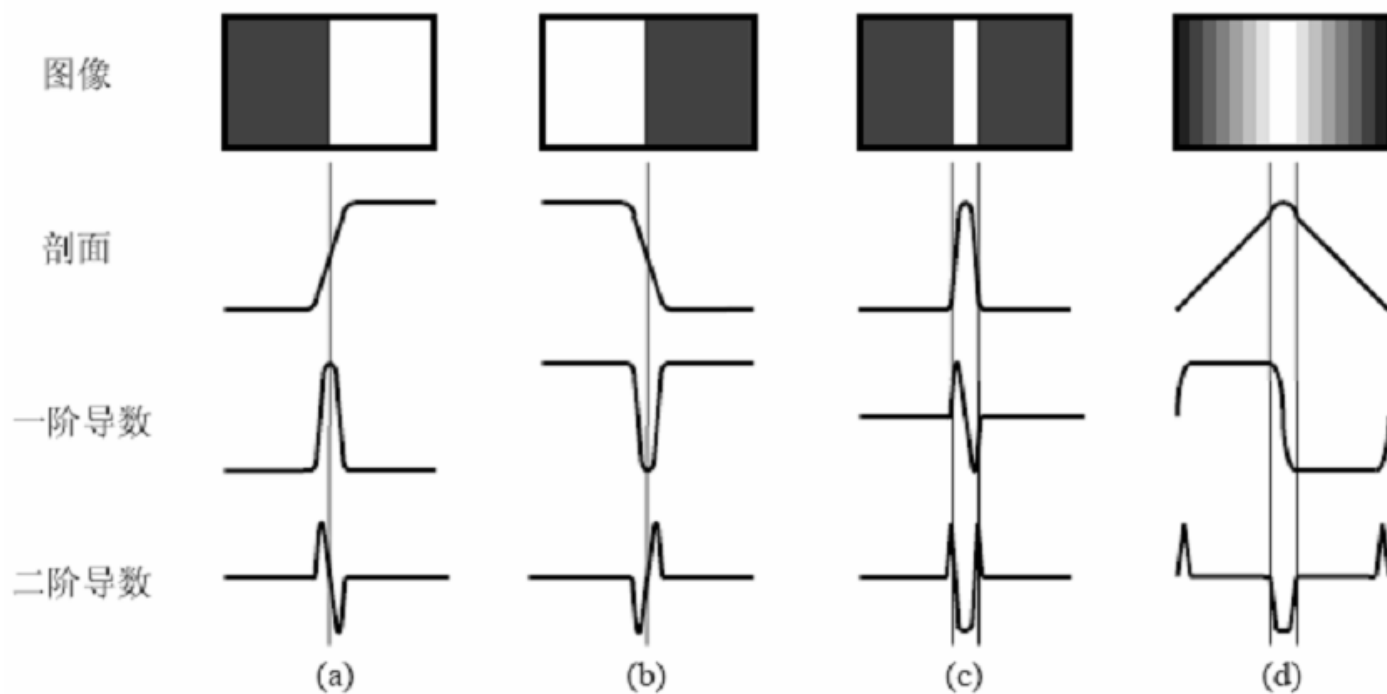
# 边缘检测

- 边缘是图象中对象的基本的特征之一，可以通过检测物体边缘来提取所需物体
  - 边缘模型
  - 边缘检测算子
  - 边缘拟合
  - 边缘搜索
  - 多尺度边缘检测

# 边缘模型

## □ 边缘 (Edge)

- 一般出现在不同灰度、颜色、纹理区域的交界处

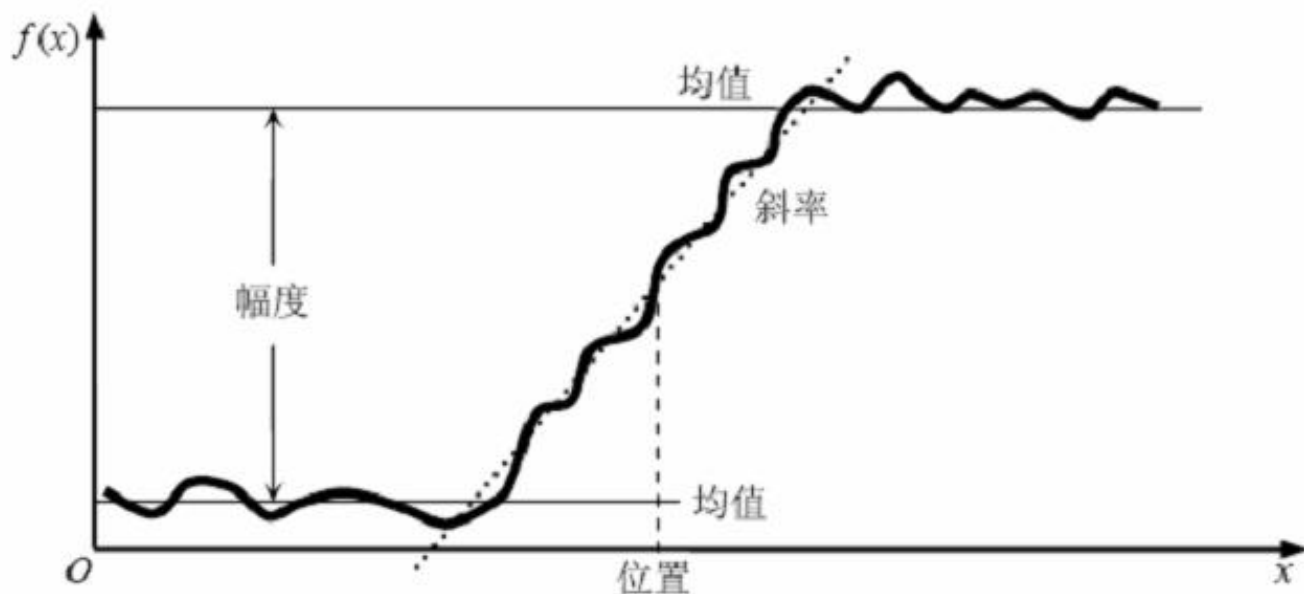


图象（灰度）边缘模型及其一阶、二阶导数

# 边缘模型

## □ 描述边缘的参数

- 位置：边缘（等效的）最大灰度不连续处
- 朝向：跨越灰度最大不连续的方向
- 幅度：灰度不连续方向上的灰度差
- 均值：属于边缘的像素的灰度均值
- 斜率：边缘在其朝向上的倾斜程度





# 边缘检测

- 边缘是图象中对象的基本的特征之一，可以通过检测物体边缘来提取所需物体
  - 边缘模型
  - 边缘检测算子
  - 边缘拟合
  - 边缘搜索
  - 多尺度边缘检测



# 边缘检测

## □ 边缘检测算子

- 正交梯度算子
  - ✓ 梯度算子
- 方向微分算子
  - ✓ Kirsch算子
- 二阶导数算子
  - ✓ 拉普拉斯 (Laplacian) 算子
  - ✓ 马尔 (Marr) 算子
- 最优边缘检测算子
  - ✓ 坎尼 (Canny) 算子
- SUSAN 算子

# 边缘检测 I: 正交梯度算子

## □ 梯度算子: 一阶差分算子

$$\text{梯度矢量: } \nabla f(x, y) = [G_x \quad G_y]^T = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \right]^T$$

$$\text{梯度幅值: } \text{mag}(\nabla f) = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}$$

$$\text{梯度方向角: } \varphi(x, y) = \arctan\left(\frac{G_y}{G_x}\right)$$

$$\text{中心差分: } \frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{1}{2} \cdot [f(x+1, y) - f(x-1, y)]$$

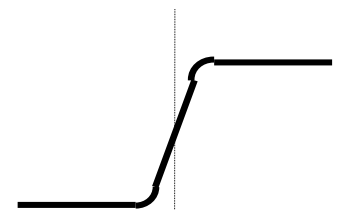
$$\text{前向差分: } \frac{\partial f}{\partial x} \approx f(x+1, y) - f(x, y)$$

$$\text{后向差分: } \frac{\partial f}{\partial x} \approx f(x, y) - f(x-1, y)$$

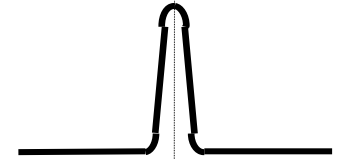
图象



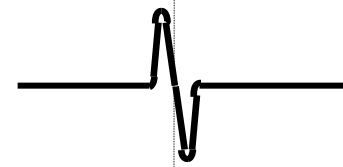
剖面



一阶导数



二阶导数





# 边缘检测 I: 正交梯度算子

## □ 梯度算子：一阶差分算子

- 由于差分运算会放大噪声影响，一般事先对图像做高斯平滑预处理
  - ✓ 等价于高斯函数梯度与图像做卷积

$$\mathbf{J}_\sigma(\mathbf{x}) = \nabla[G_\sigma(\mathbf{x}) * I(\mathbf{x})] = [\nabla G_\sigma](\mathbf{x}) * I(\mathbf{x})$$

- ✓ 高斯函数梯度

$$\nabla G_\sigma(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial G_\sigma}{\partial x}, \frac{\partial G_\sigma}{\partial y} \right) (\mathbf{x}) = [-x \quad -y] \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

# 边缘检测 I: 正交梯度算子

□ 梯度算子：利用模板（与图象进行）卷积

■ 模板比较

- ✓ ① 边缘粗细
- ✓ ② 方向性
- ✓ ③ 平滑操作：Prewitt 和 Sobel

1	
	-1

	1
-1	

(a) Roberts

-1		1
-1		1
-1		1

1	1	1
-1	-1	-1

(b) Prewitt

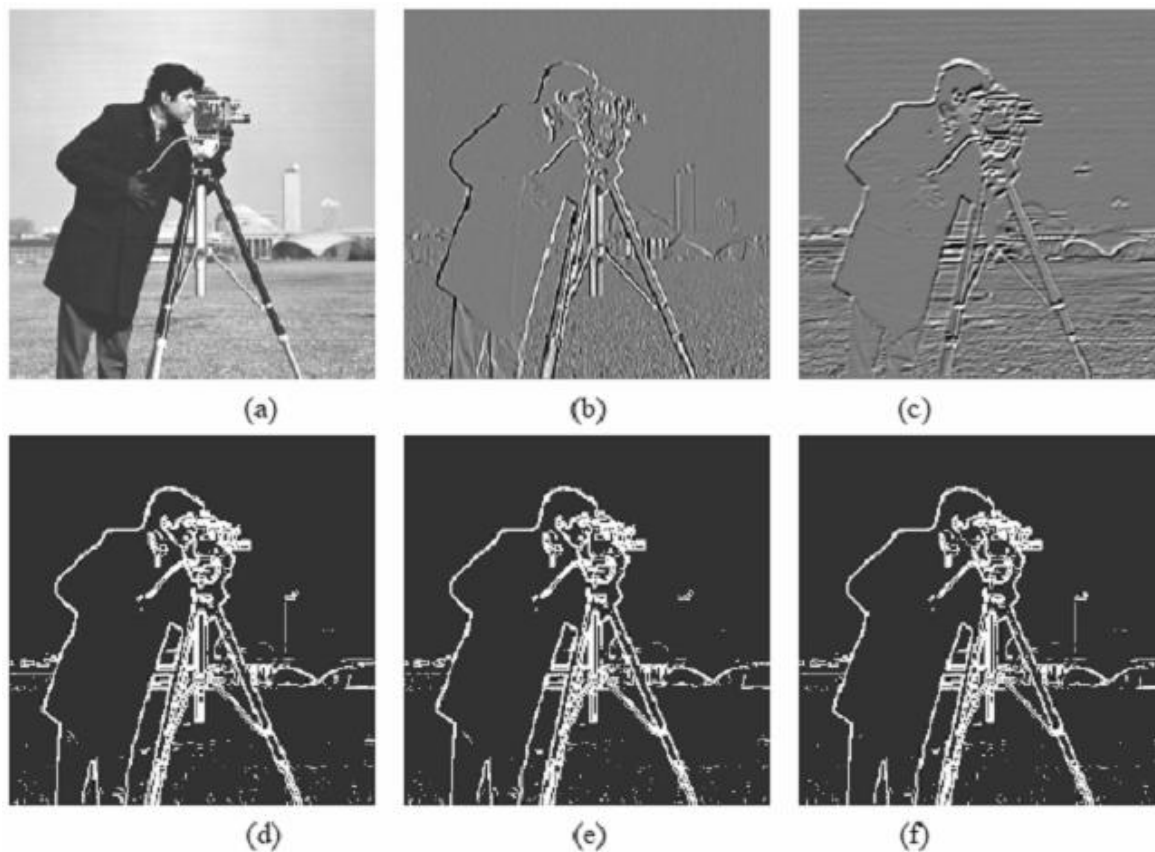
-1		1
-2		2
-1		1

1	2	1
-1	-2	-1

(c) Sobel

# 边缘检测 I: 正交梯度算子

## □ 梯度图示例



a)原图;

d) Sobel梯度图 (范数2)

b) Sobel 水平模板;

e) Sobel梯度图 (范数1)

c) Sobel 垂直模板;

f) Sobel梯度图 (范数 $\infty$ )

# 边缘检测 II: 方向微分算子

□ 基于特定方向上的微分来检测边缘

八方向Kirsch (7×7) 模板

-5	3	3
-5		3
-5	3	3

3	3	3
-5	0	3
-5	-5	3

3	3	3
3	0	3
-5	-5	-5

3	3	3
3	0	-5
3	-5	-5

3	3	-5
3		-5
3	3	-5

3	-5	-5
3	0	-5
3	3	3

-5	-5	-5
3	0	3
3	3	3

-5	-5	3
-5	0	3
3	3	3

# 边缘检测 II: 方向微分算子

## □ 用不同模板对图像进行卷积

1.0	1.0	1.0
-1.0	-1.0	-1.0

(a)

1.0	1.0	0.7
0.8		-0.8
-0.7	-1.0	-1.0

(b)

1.0	0.8	-0.7
1.0		-1.0
0.7	-0.8	-1.0

(c)

-1.0		1.0
-1.0		1.0
-1.0		1.0

(d)

-0.7	0.8	1.0
-1.0		1.0
-1.0	-0.8	0.7

(e)

0.7	1.0	1.0
-0.8		0.8
-1.0	-1.0	-0.7

(f)

- 边缘幅度: 卷积值的最大值的绝对值
- 边缘方向: 卷积值的最大值的符号
- 模板的对称性 → 模板数减半
- 可将各系数值线性变换到整数值, 其中绝对值最小的系数变换为单位值



# 边缘检测 II：方向微分算子

- 有噪声时：边缘像素常孤立/分小段连续
- 封闭边界（轮廓）：连接边缘像素
- 一种具体方法
  - 利用像素梯度的幅度和方向：
    - ✓ 像素(s, t)在像素(x, y)的邻域

$$|\nabla f(x, y) - \nabla f(s, t)| \leq T$$

$$|\varphi(x, y) - \varphi(s, t)| \leq A$$



# 边缘检测 III: 二阶导数算子

## □ 1. 拉普拉斯算子:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

## □ 基于上面定义, 离散化近似

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx f_x(x + 0.5, y) - f_x(x - 0.5, y) = f(x + 1, y) - 2f(x, y) + f(x - 1, y)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx f_y(x, y + 0.5) - f_y(x, y - 0.5) = f(x, y + 1) - 2f(x, y) + f(x, y - 1)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x + 1, y) + f(x - 1, y) + f(x, y + 1) + f(x, y - 1) - 4f(x, y)$

## □ 几种常用的拉普拉斯算子模板:

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

1	1	1
1	-8	1
1	1	1

# 边缘检测 III: 二阶导数算子

## □ 1. 拉普拉斯算子

- 由于涉及二阶微分, 对图象中的噪声相当敏感
- 产生双象素宽的边缘
- 滤波结果为标量, 不能提供边缘方向的信息





# 边缘检测 III: 二阶导数算子

## □ 2. 马尔算子

- 在对函数算二阶微分前，先对图像进行高斯卷积（低通滤波）

$$\mathbf{J}_\sigma(\mathbf{x}) = \nabla[G_\sigma(\mathbf{x}) * I(\mathbf{x})] = [\nabla G_\sigma](\mathbf{x}) * I(\mathbf{x})$$

$$S_\sigma(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \mathbf{J}_\sigma(\mathbf{x}) = [\nabla^2 G_\sigma](\mathbf{x}) * I(\mathbf{x})$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 G_\sigma(\mathbf{x}) &= \left( \frac{x^2 + y^2}{\sigma^4} - \frac{2}{\sigma^2} \right) G_\sigma(\mathbf{x}) \\ &= \left( \frac{x^2}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2} \right) G_\sigma(x)G_\sigma(y) + \left( \frac{y^2}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2} \right) G_\sigma(y)G_\sigma(x)\end{aligned}$$

- 上述操作等价于：高斯函数的二阶导数与图像做卷积运算

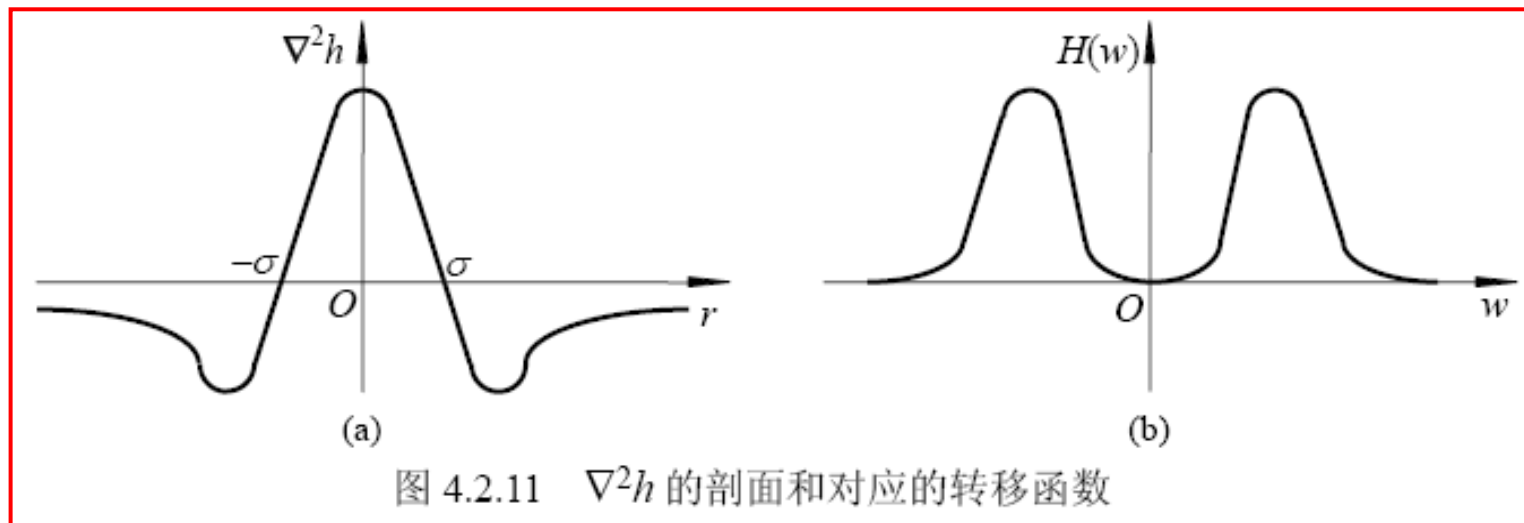
✓ 具体计算过程：

- (1) 用一个2-D的高斯平滑模板与源图象卷积
- (2) 计算卷积后图象的拉普拉斯值
- (3) 检测拉普拉斯图象中的过零点作为边缘点

# 边缘检测 III：二阶导数算子

## □ 2. 马尔算子

- 等价于：高斯函数的二阶导数与图像做卷积运算
- 马尔算子的一维函数及其频谱图：
  - ✓ 中心为零、中频隆起、高频和低频都被衰减的圆对称带通滤波器





# 边缘检测 IV：最优边缘检测算子

## □ 好的边缘检测算子应具有的三个指标

- 低失误概率：既要少将真正的边缘丢失也要少将非边缘判为边缘

$$SNR = \frac{\left| \int_{-w}^{+w} G(-x) f(x) dx \right|}{n_0 \left[ \int_{-w}^{+w} f^2(x) dx \right]^{1/2}}$$

- 高位置精度：检测出的边缘应在真正的边界上

$$Localization = \frac{\left| \int_{-w}^{+w} G'(-x) f'(x) dx \right|}{n_0 \sqrt{\int_{-w}^{+w} f'^2(x) dx}}$$

- 对每个边缘有唯一的响应：得到的边界为单像素宽

$$X_{zc}(f) = \pi \left( \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f'^2(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f''^2(x) dx} \right)^{1/2}$$



# 边缘检测 IV：最优边缘检测算子

## □ Canny算子

- 基本思想：在抑制噪声的前提下，找到图像中最可能真实的边缘，且这些边缘要尽可能单像素宽、连续、定位准确
- 可以用高斯函数的一阶微分算子来近似
- 基本步骤
  - ✓ 高斯滤波平滑（解决噪声问题）
    - 对图像预处理，抑制噪声在计算梯度时的影响（信噪比准则）
  - ✓ 计算梯度幅度与方向
    - 计算一阶微分
  - ✓ 非极大值抑制（解决边缘过粗问题）
    - 实现边缘的高位置精度，得到的边界为单像素宽（单边缘响应准则）
  - ✓ 双阈值检测和连接（解决断裂和假阳性问题）
    - 避免真正的边缘丢失，避免将非边缘判为边缘（定位精度准则）



# 边缘检测 IV：最优边缘检测算子

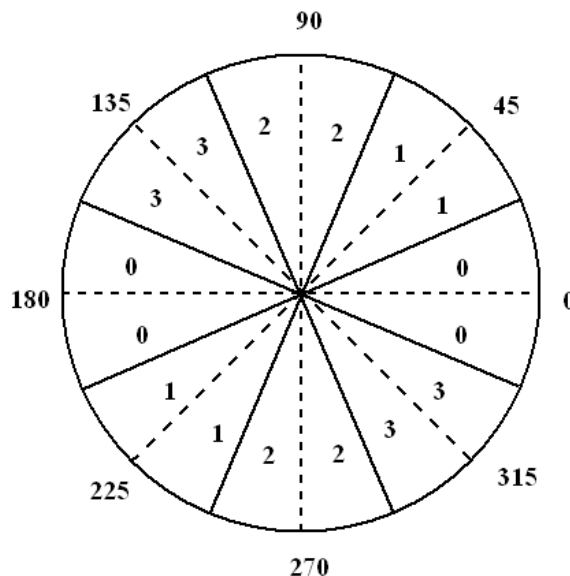
- 在抑制噪声的前提下，以单像素精度定位边缘，并利用边缘的连续性剔除虚假响应

步骤	操作	目的
1. 高斯平滑	用高斯核 $G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$ 与图像卷积	去除噪声，避免将噪声误判为边缘
2. 计算梯度	常用Sobel算子计算 $G_x, G_y$ ，得到幅值 $M = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}$ 和方向 $\theta = \arctan(G_y/G_x)$	获取每个点的变化强度和方向
3. 非极大值抑制	对每个像素，比较其幅值与梯度方向上前后两个邻居的幅值。若非最大，则置0	细化边缘，使边缘宽度为1像素
4. 双阈值	设高阈值 $T_h$ 和低阈值 $T_l$ (通常 $T_l = 0.4 \times T_h$ )。将像素分为强、弱、无三类	初步筛选候选边缘，区分可信边缘与可疑边缘
5. 边缘连接	仅当弱边缘像素与强边缘像素8邻域相连时才保留为最终边缘	连接断裂边缘，同时去除孤立噪声点

# Canny算子：非极大值抑制

## □ 非极大值抑制 (non-maxima suppression, NMS)

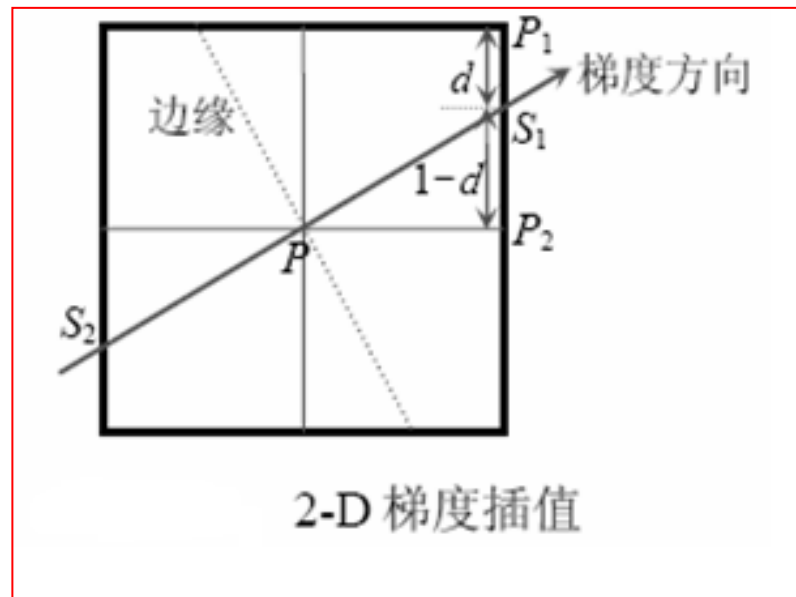
- 细化幅值图像 $M[i,j]$ 中的屋脊带(ridge), 只保留幅值局部变化最大点
- NMS通过抑制梯度线上所有非屋脊峰值的幅值来细化边缘。
- 将梯度角 $\theta[i,j]$ 的变化范围分为四个扇区 $\zeta[i,j]=\text{Sector}(\theta[i,j])$ ;
- 用 $3\times 3$ 邻域作用于幅值图像 $M[i,j]$ , 邻域中心像素 $M[i,j]$ 与沿着梯度线方向的两个像素进行比较: 若 $M[i,j]$ 不比沿梯度线方向的两个相邻点幅值大, 则 $M[i,j]$ 置零。



# Canny算子：非极大值抑制

## □ 改进方法：用插值进行非最大消除

- 用插值进行最大值消除：精确但计算量大
- 思路：通过对相邻单元的梯度幅值的插值估计梯度线上的相邻幅值

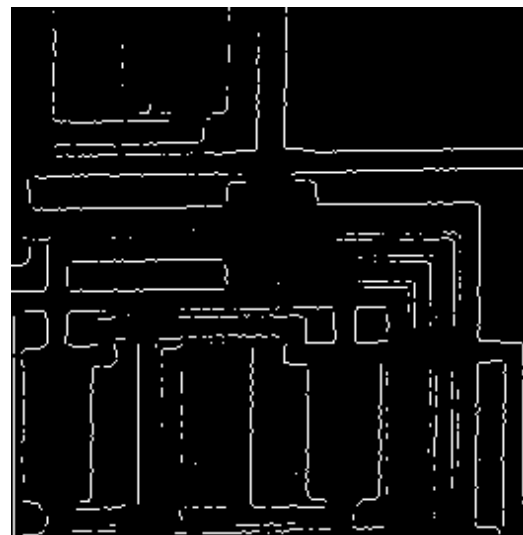
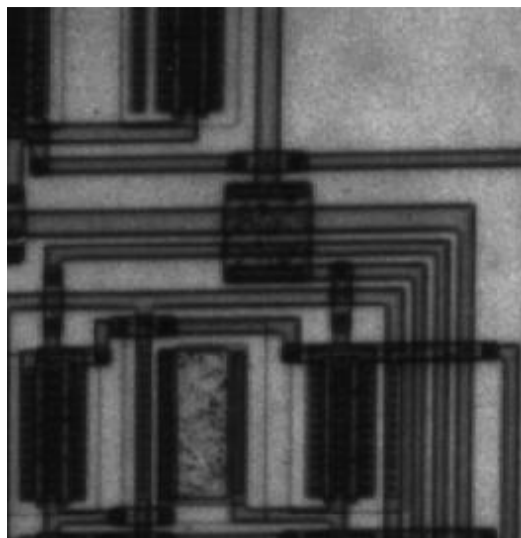




# Canny算子：双阈值算法

- 双阈值算法采用两个阈值  $\tau_1$  和  $\tau_2$ ，且  $\tau_2 \approx 2\tau_1$
- 得到两个阈值边缘图像  $T_1[i, j]$  和  $T_2[i, j]$ 
  - 边缘图像  $T_1$  中的边缘点响应值  $\geq \tau_1$
  - 边缘图像  $T_2$  中的边缘点响应值  $\geq \tau_2$
- $T_2[i, j]$  含有的假边缘少，但有间断点
- 以  $T_2[i, j]$  为指导，在  $T_1[i, j]$  中相应8邻域点寻找可以连接到轮廓上的点
- 不断在  $T_1[i, j]$  收集边缘，直到将  $T_2[i, j]$  中所有的间隙连接起来为止

# 边缘检测实例对比

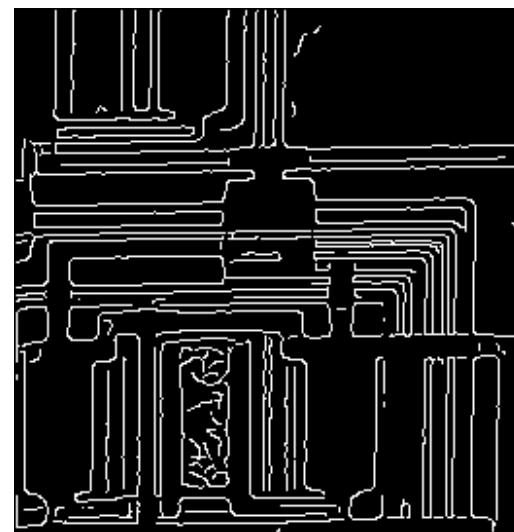
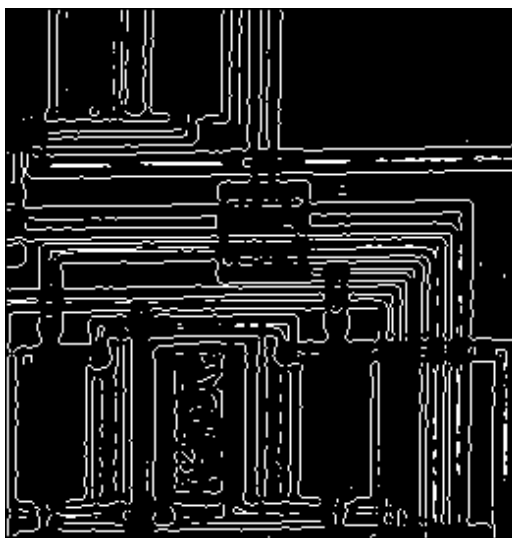


Roberts

Sobel

Log

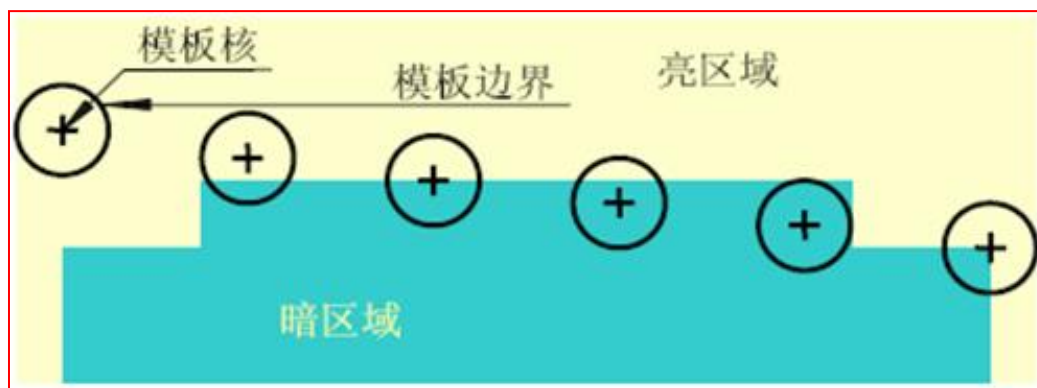
Canny



# 边缘检测 V: SUSAN算子

## □ USAN: Univalued Segment Assimilating Nucleus

- 核同值区：相对于模板的核，模板中有一定的区域与它有相同灰度
- USAN面积携带了关于图象中核像素处结构的主要信息
  - ✓ 当核像素处在图象中的灰度一致区域，USAN的面积会达到最大。
  - ✓ 当核处在直边缘处该面积约为最大值的一半，而当核处在角点处则为最大值的1/4
- 使用USAN面积作为特征起到了增强边缘和角点的效果

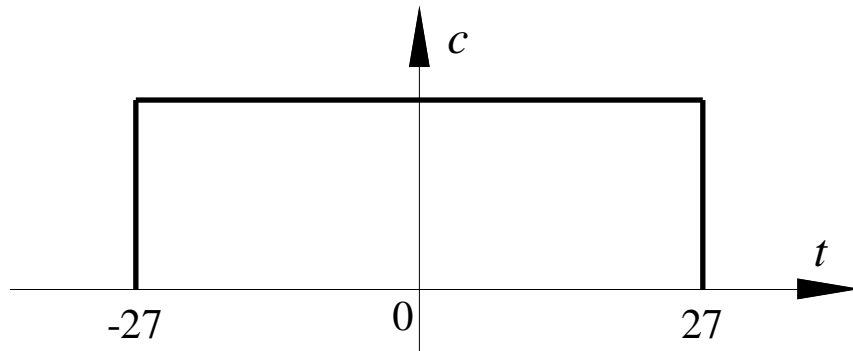
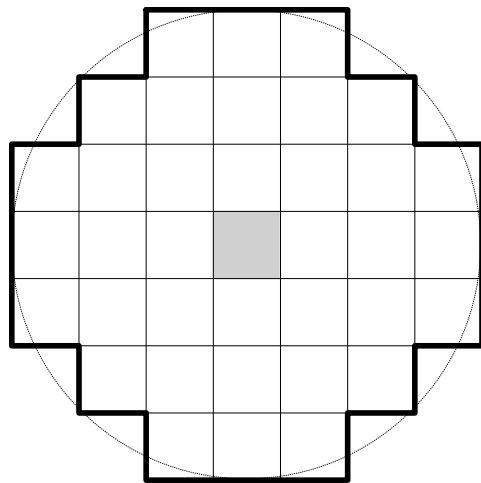


# 边缘检测 V: SUSAN算子

□ SUSAN: 最小 (Smallest) 核同值区(USAN)

■ 检测模板: 37个像素, 半径为3.4像素

$$C(x_0, y_0; x, y) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } |f(x_0, y_0) - f(x, y)| \leq T \\ 0 & \text{如果 } |f(x_0, y_0) - f(x, y)| > T \end{cases}$$





# 边缘检测 V: SUSAN算子

- 检测对模板中的每个像素进行
- 得到输出的游程和 (running total)

$$S(x_0, y_0) = \sum_{(x,y) \in N(x,y)} C(x_0, y_0; x, y)$$

- 边缘响应:

$$R(x_0, y_0) = \begin{cases} G - S(x_0, y_0) & \text{如果 } S(x_0, y_0) < G \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

- 阈值  $G = 3S_{\max}/4$  (为了达到最佳信噪比), 其中  $S_{\max}$  是  $S$  所能取的最大值, 即模版面积。
- 物理意义: 核同值区面积越小, 边缘响应值越大

# 边缘检测 V: SUSAN算子

## □ SUSAN算子特点

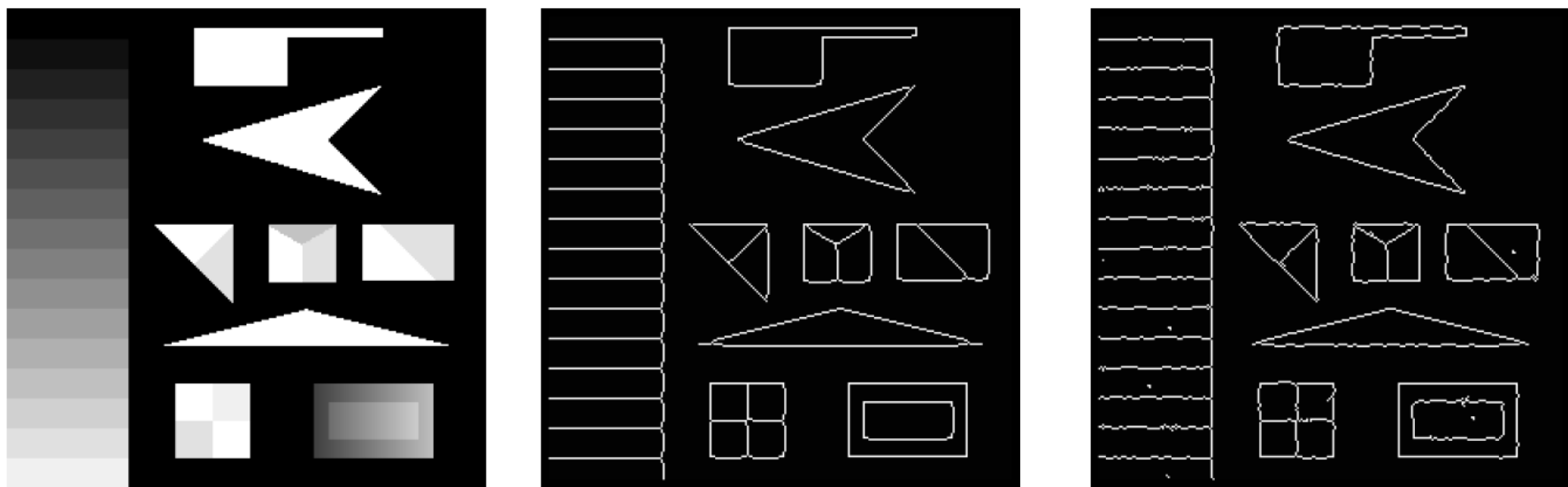
- 有噪声时的性能较好
  - 不需要计算微分
  - 对面积计算中的各个值求和（积分）
  - 非线性响应特点
- 易自动化实现
  - 控制参数的选择简单
  - 参数的任意性较小



图 5.1.5 用 SUSAN 算子检测到的角点

# 边缘检测 V: SUSAN算子

## □ SUSAN算子检测实例



左：原图。中：SUSAN检测结果。右：含高斯白噪声的结果。(SNR=0.5)

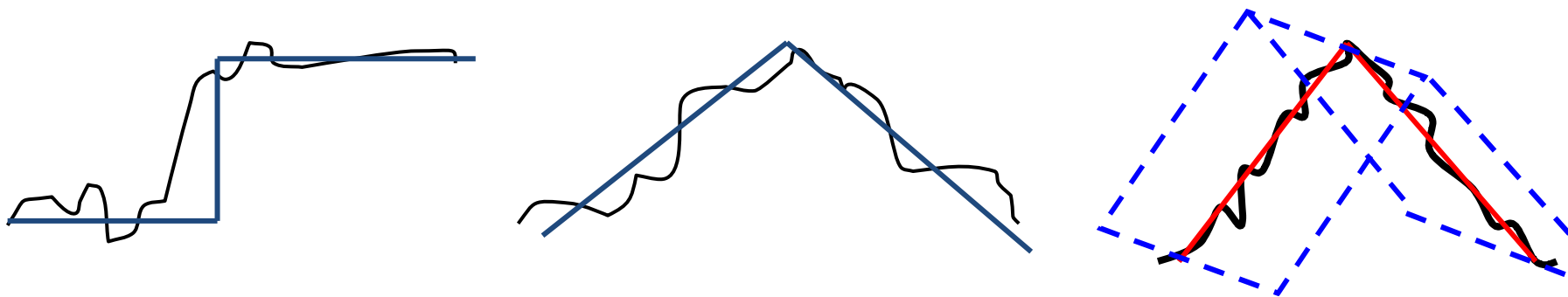


# 边缘检测

- 边缘是图象中对象的基本的特征之一，可以通过检测物体边缘来提取所需物体
  - 边缘模型
  - 边缘检测算子
  - **边缘拟合**
  - 边缘搜索
  - 多尺度边缘检测

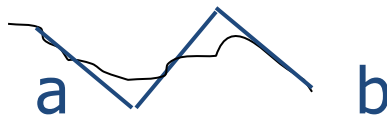
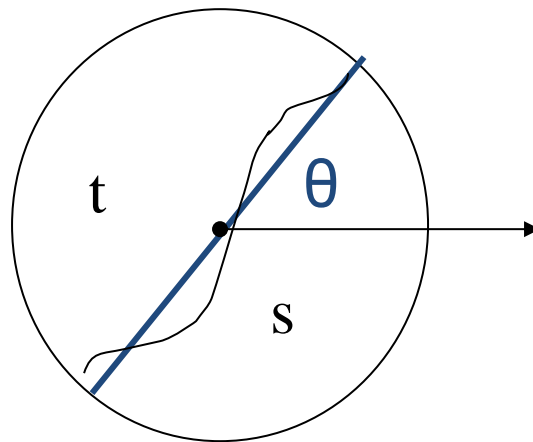
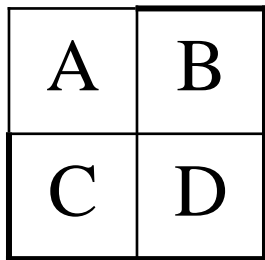
# 边缘拟合(Edge Fitting)

- 对图象中一个子区域，用理想灰度阶跃或斜变去拟合实际图象数据，从而求出拟合的理想模型参数，如阶跃幅度、斜变倾角等，并以此为这个子区域的边缘强度和方向度量
- 从某种意义上说，拟合本质是一种匹配滤波，旨在从失真和噪声中检测出理想边缘来。因此，有较强的抗噪声能力



# 灰度阶跃的拟合

- 构造原图象（或子图、小区域）的拟合曲面，再在拟合曲面上利用曲面的参数检测出边缘
  - 如：灰度阶跃边缘拟合。
    - ✓ 用理想灰度阶跃模型去拟合一个 $2 \times 2$ 的子图
    - ✓ 将子图 $f(x,y)$ 展开成基函数表达式。由均方误差最小求边缘幅度和角度



# 灰度阶跃的拟合

$$H(x, y) = \begin{cases} s & x \sin \theta > y \cos \theta \\ t & \text{其他} \end{cases}$$

A	B
C	D

在第一象限，有：

$$\theta = \frac{\pi}{4} \left( 1 - \frac{B-C}{A-D} \right)$$

$$s = \frac{B}{4} - \frac{A-D}{2}$$

$$t = \frac{B}{4} + \frac{A-D}{2}$$

边缘幅度：  $|s-t| = |A-D|$

当  $\theta$  在第二象限：

边缘幅度：  $|s-t| = |B-C|$

整副图象边缘幅度：  $\max\{|A-D|, |B-C|\}$

与Roberts算子的结果相同



# 基于斜面模型的边缘检测

## □ 拟合模型

- 将 $M \times N$ 的数字图象划分为相连接的区域集合 $P$ ,  $P=(P_1, P_2, \dots, P_i, \dots)$
- $P_i$ 的大小设为 $R \times C$  (通常为 $3 \times 3$ )

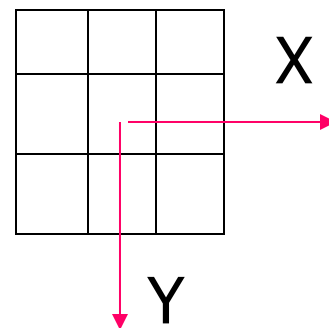
$$\hat{f}(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$$

- 对每一个小区域, 用一个斜平面来近似
- 拟合误差:

$$e^2 = \sum_R \sum_{\times C} [\alpha x + \beta y + \gamma - f(x, y)]^2$$

# 斜面拟合

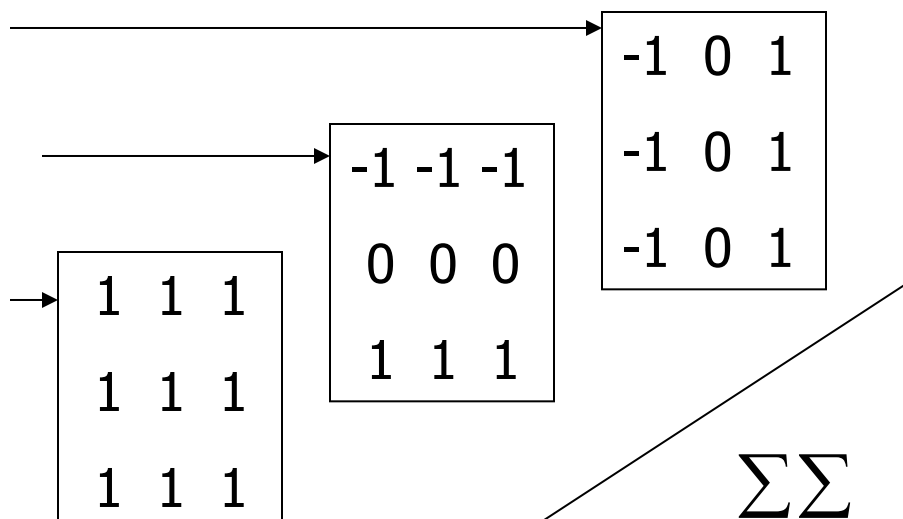
- 由均方误差最小来求  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ ,
- 区域  $3 \times 3$ , 原点取在中心点时, 有:



$$\alpha = \sum_{R \times C} \sum x f(x, y) / \sum_{R \times C} \sum x^2$$

$$\beta = \sum_{R \times C} \sum y f(x, y) / \sum_{R \times C} \sum y^2$$

$$\gamma = \sum_{R \times C} \sum f(x, y) / \sum_{R \times C} \sum 1$$



代入误差算式, 得出误差值。

误差较小时, 认为拟合可靠。

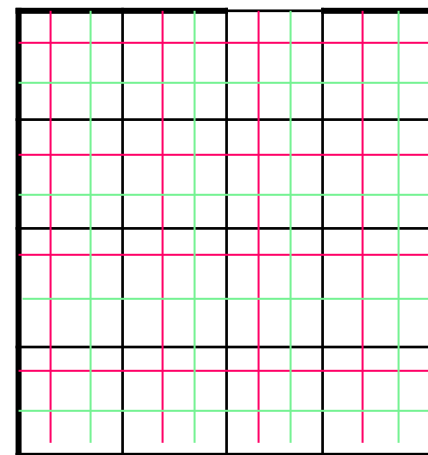
# 斜面交界的判断

□ 对于“可靠”的斜面，把该拟合斜平面的参数作为小区域的参数（不重叠划分）或小区域中心点的参数（重叠划分）。

□ 有：梯度值为： $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$   
方向为： $\theta = \tan^{-1} \frac{\alpha}{\beta}$

□ 然后用斜面参数判断各个斜面间是否有边缘存在

即考察  $\alpha_1 = \alpha_2?$   $\beta_1 = \beta_2?$   $\gamma_1 = \gamma_2?$





# 基于斜面拟合的边缘检测

## □ 一般步骤

- 选取适合的拟合区域
- 根据模型求解拟合系数
- 求拟合斜面各点灰度值
- 计算误差，判断斜面的可靠性
- 对于可靠的斜面，计算相邻点或区域不在同一斜面上的度量
- 选出边缘度量值局部最大的点，定为边缘点

# 边缘搜索：跟踪方法

## □ 跟踪的一般步骤：

- 确定搜索的起点，对于边缘跟踪则起点是某一边缘点
- 采取一种合适的数据结构和搜索机理，在已有边缘点的基础上进行搜索，不断确定新的边缘点
- 规定搜索终止的条件，在满足条件时停止搜索

9				8			5
	5				6		4
		9			5		
6			4			7	
	7		6	2		9	
4		6			4		7
		5		2	6		
6	4				7		

$$T_d = 7$$

$$T_t = 4$$



# 边缘搜索：图搜索

## □ 基本概念

- 边界点和边界段可以用图结构标示，通过在图中搜索达到某一目标的最佳路径（最短路径，最小消耗路径）寻找边缘。
- 路径评价函数可以定义为： $f(n)=g(n)+h(n)$ 
  - ✓  $n$ : 搜索过程进行到的当前节点。
  - ✓  $g(n)$ : 为从起始节点到当前节点所有路径代价。
  - ✓  $h(n)$ : 是当前节点到目标节点将要经过的所有路径的代价。（一般为对真实代价 $h(n)$ 的估计值，从而为启发项）

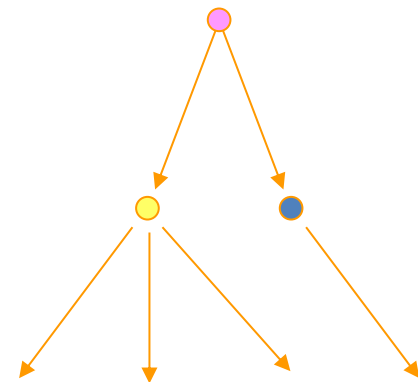
# 边缘搜索：图搜索

□ 将边缘象素和边界段用图表示

图：  $G = \{N, A\}$

结点集  $\{n_1, \dots\}$

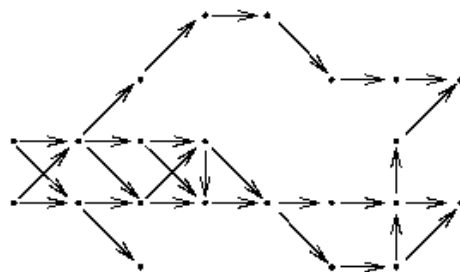
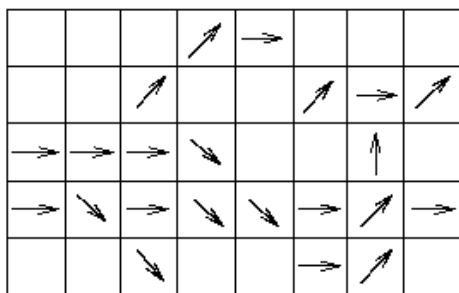
结点对集  $\{(n_i, n_j)\}$



□ 通路代价：通常跟灰度值的变化是相关的

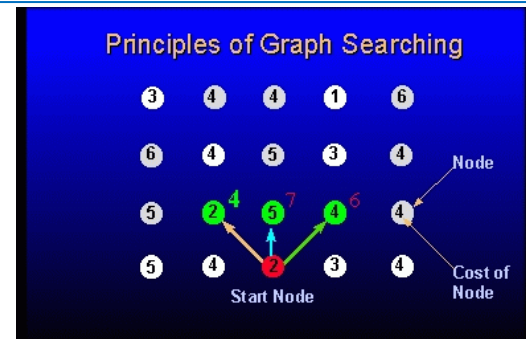
□ 图的建立

$$C = \sum_{i=2}^K c(n_{i-1}, n_i)$$



(左) 显著边缘点的方向 (右) 相应的图

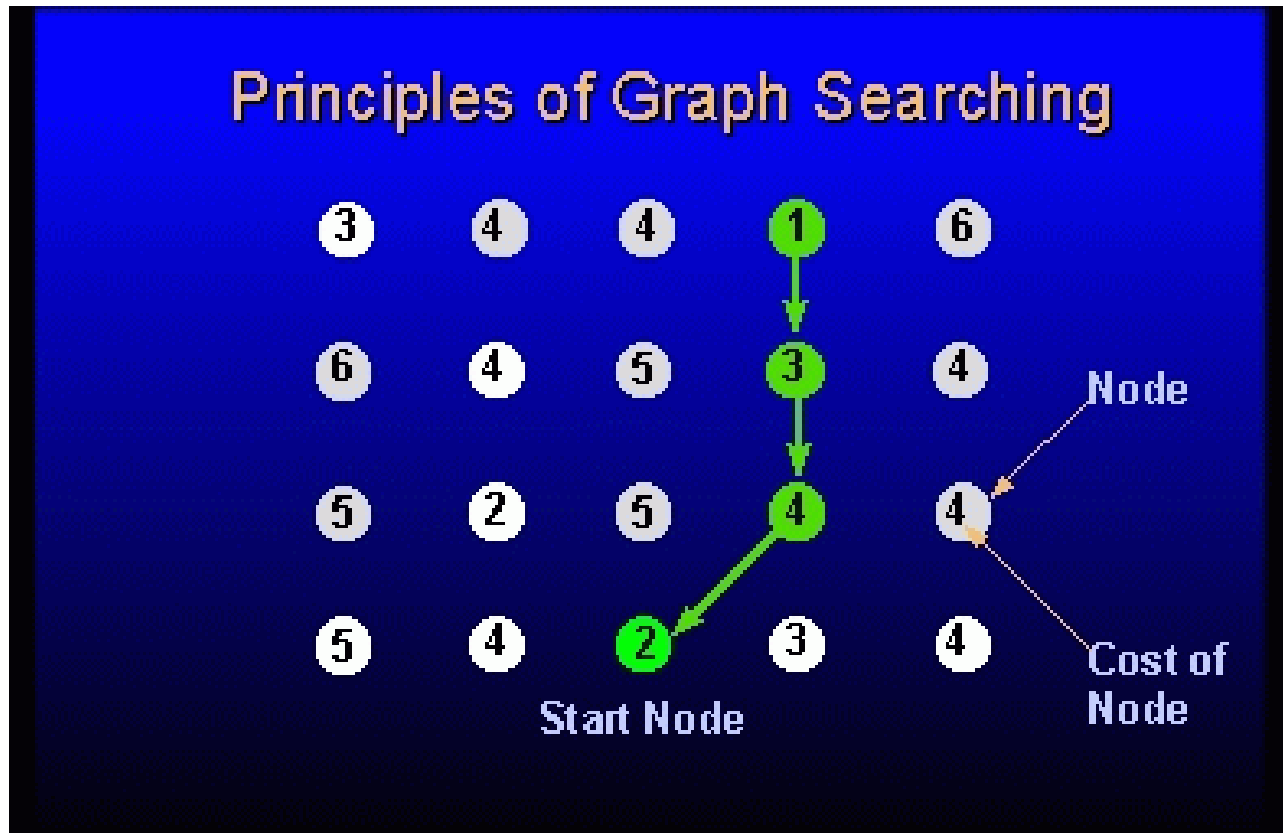
# 图搜索算法



## Heuristic graph search

1. Expand the starting node  $n_A$  and put all its successors into an OPEN list with pointers back to the starting node  $n_A$ . Evaluate the cost function  $f$  for each expanded node.
2. If the OPEN list is empty, fail.  
Determine the node  $n_i$  from the OPEN list with the lowest associated cost  $f(n_i)$  and remove it. If  $n_i = n_B$ , then trace back through the pointers to find the optimum path and stop.
3. If the option to stop was not taken in step (2), expand the specified node  $n_i$ , and put its successors on the OPEN list with pointers back to  $n_i$ . Compute their costs  $f$ . Go to step (2).

# 图搜索实例



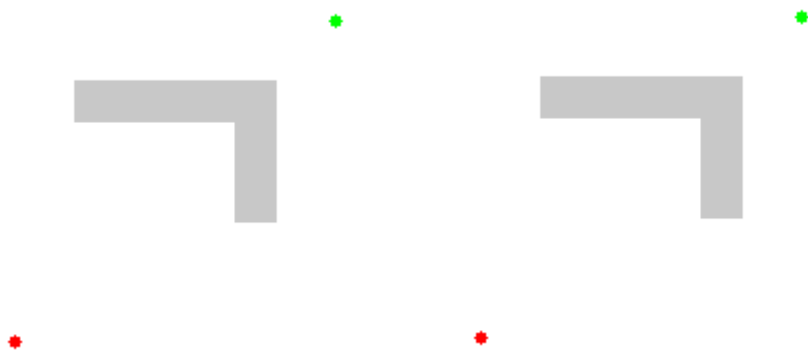
# 启发式图搜索

□ 利用问题拥有的启发信息来引导搜索，

- 减少搜索范围
- 降低问题复杂度

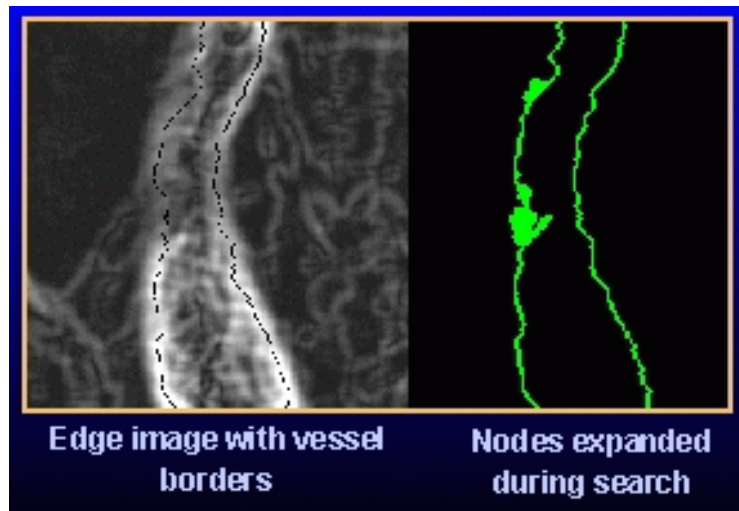
□ 代价函数  $f(n)=g(n)+h(n)$

- 启发项  $h(n)$  能加快搜索速度，但不一定能找到全局最优。
- 当无启发项 ( $h(n)=0$ ) 时，一定能找到全局最优，但搜索范围加大。



普通搜索过程演示

启发式搜索过程演示





# 代价函数的设计

- 使用“启发”信息，构造评价函数，计算路径的耗费，是启发式搜索的关键。
- 具体如何构造则要分析该问题的具体情况，将多种因素合理的分离开来，把实际情况中的约束转化为计算机可操作的表达式。
  - 灰度梯度的幅度
  - 灰度梯度的方向
  - 路径的曲率
  - 路径与某一函数的近似程度
  - 到目标点的距离等
  -



# 多尺度边缘检测

## □ 现象

- 大尺度下能较可靠地消除误检，检测到真正边缘点，但定位不准；
- 小尺度定位较准，但误检增加；
- 大尺度检测真正边缘点，小尺度精确定位
- 图像不同的边缘信息会在不同的尺度下表现

## □ 方法

- 融合各个尺度的检测结果，获得稳定的边缘信息。

# 基于二进小波的多尺度边缘检测

## 用于边缘检测的二进小波:

母函数:  $\varphi(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2)/\sigma^2)/2\pi\sigma^2$ ; (高斯核函数)

小波函数:  $\psi^1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ ;  $\psi^2 = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ ;

二进小波变换:  $S_{2^j} f \rightarrow \{W_{2^j}^1 f, W_{2^j}^2 f, S_{2^{j+1}} f\}$  (离散算法  $\alpha$ -trous)

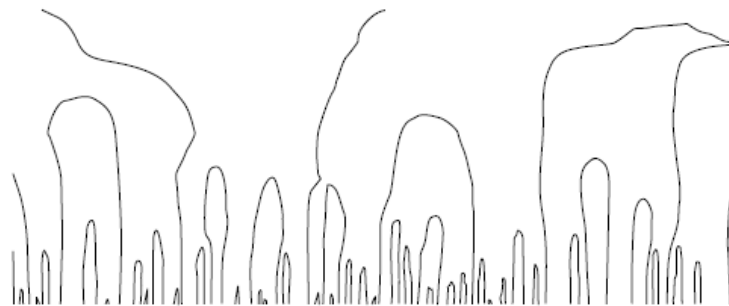
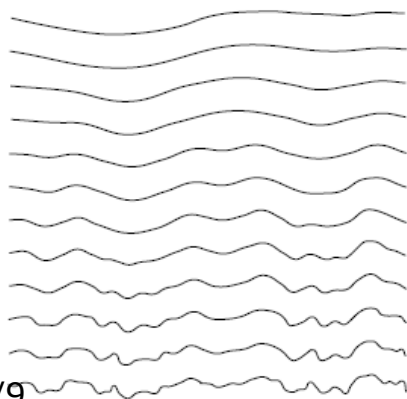
$W_{2^j}^i f = \langle f, \psi_{2^j}^i \rangle$ ;  $i=1, 2$ ; (分别对应水平和垂直边缘)

$S_{2^{j+1}} f = \langle f, \varphi_{2^j} \rangle$ ; (平滑信号)

模值  $M_{2^j} f = \sqrt{|W_{2^j}^1 f|^2 + |W_{2^j}^2 f|^2}$ ; 幅角  $A_{2^j} f = \arctan(W_{2^j}^1 f / W_{2^j}^2 f)$ ;

## 模极大链:

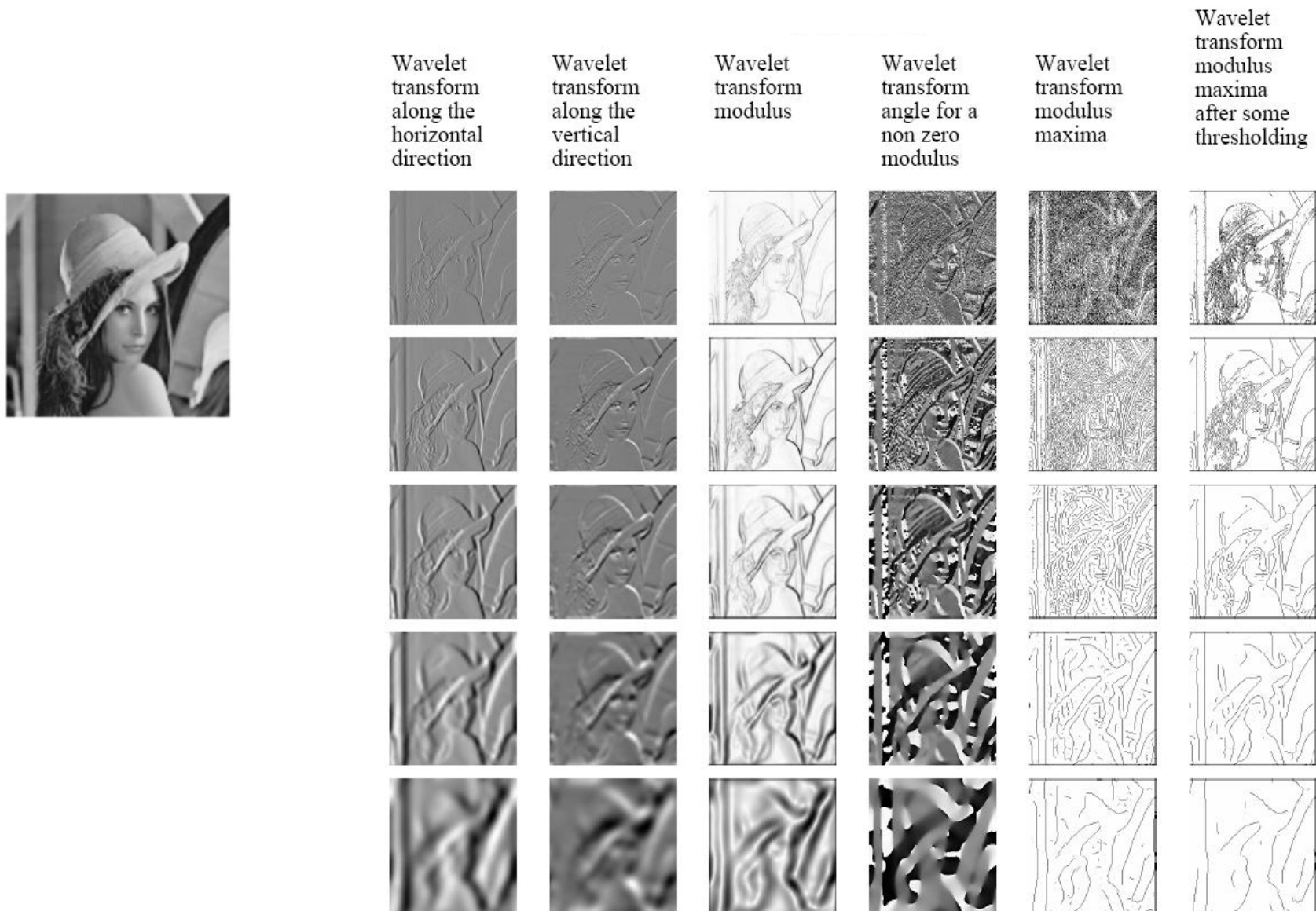
小波系数的模极大值(即导数的过零点), 在尺度空间会形成“向下开口”的连续曲线。



左: 不同尺度的平滑信号

右: 尺度空间的模极大链

# 基于二进小波的多尺度边缘检测





# 基于二进小波的多尺度边缘检测

## □ 算法步骤:

1. 选择二进小波 $\{\psi^1, \psi^2\}$ , 分解级数 $J$ , 和模阈值 $T$ ;
2. 对图像 $f$ 进行二进小波变换, 得到 $S_{2^j} f$ 和 $\{W_{2^j}^1 f, W_{2^j}^2 f\}_{j=1}^J$ ;
3. 计算模值  $M_{2^j} f = \sqrt{|W_{2^j}^1 f|^2 + |W_{2^j}^2 f|^2}$ ;
4. 计算幅角  $A_{2^j} f = \arctan(W_{2^j}^1 f / W_{2^j}^2 f)$ ;
5. 用非极大值抑制得到小波系数的局部模极大值点;
6. 把局部模极大值点延尺度连起来, 得到极值链;
7. 利用模阈值 $T$ 和极值链长度阈值, 去除由噪声引起或不感兴趣的边界;