

第五章：图像表达-边缘检测

授课老师：李厚强，胡洋，周文罡，李礼

图像表达内容提纲

□ 图像表达：特征检测与匹配

- 边缘检测，关键点检测，特征描述，视觉预训练模型

如何构建相同场景
或类别的图像之间的
关联关系？



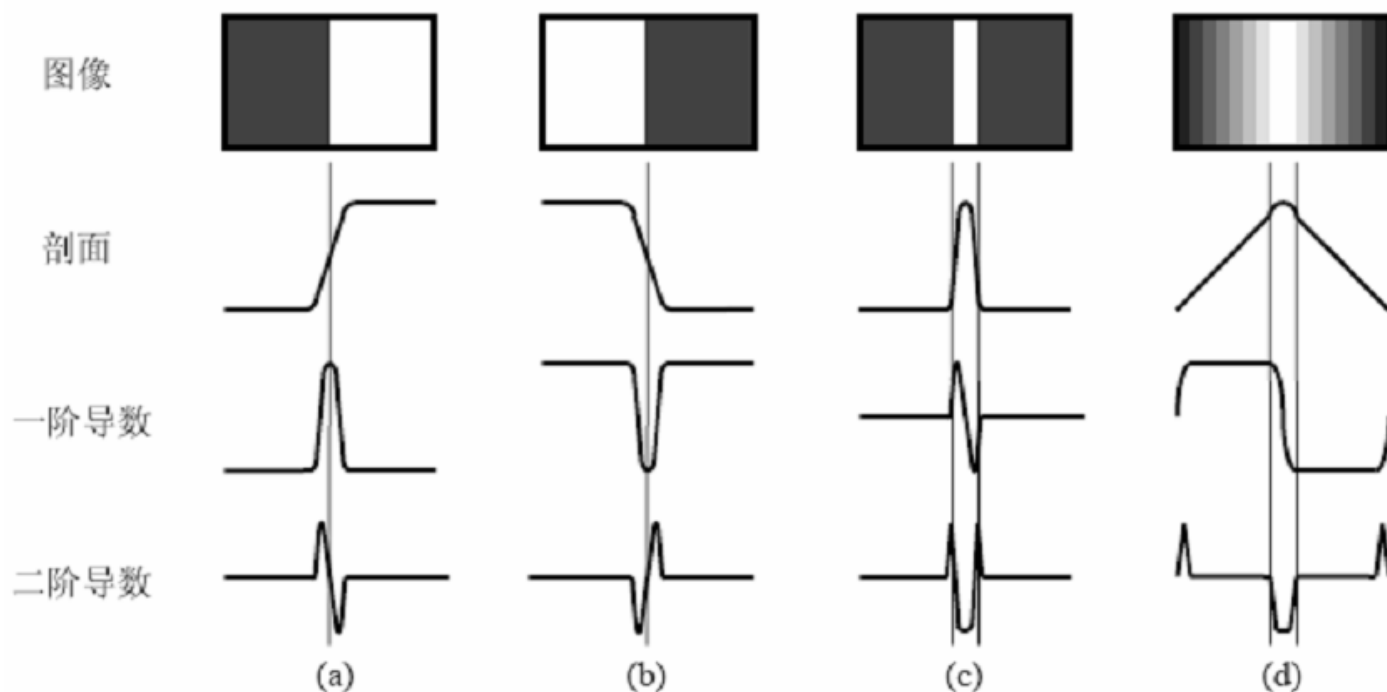
边缘检测

- 边缘是图象中对象的基本的特征之一，可以通过检测物体边缘来提取所需物体
 - 边缘模型
 - 边缘检测算子
 - 边缘拟合
 - 边缘搜索
 - 多尺度边缘检测

边缘模型

□ 边缘 (Edge)

- 一般出现在不同灰度、颜色、纹理区域的交界处

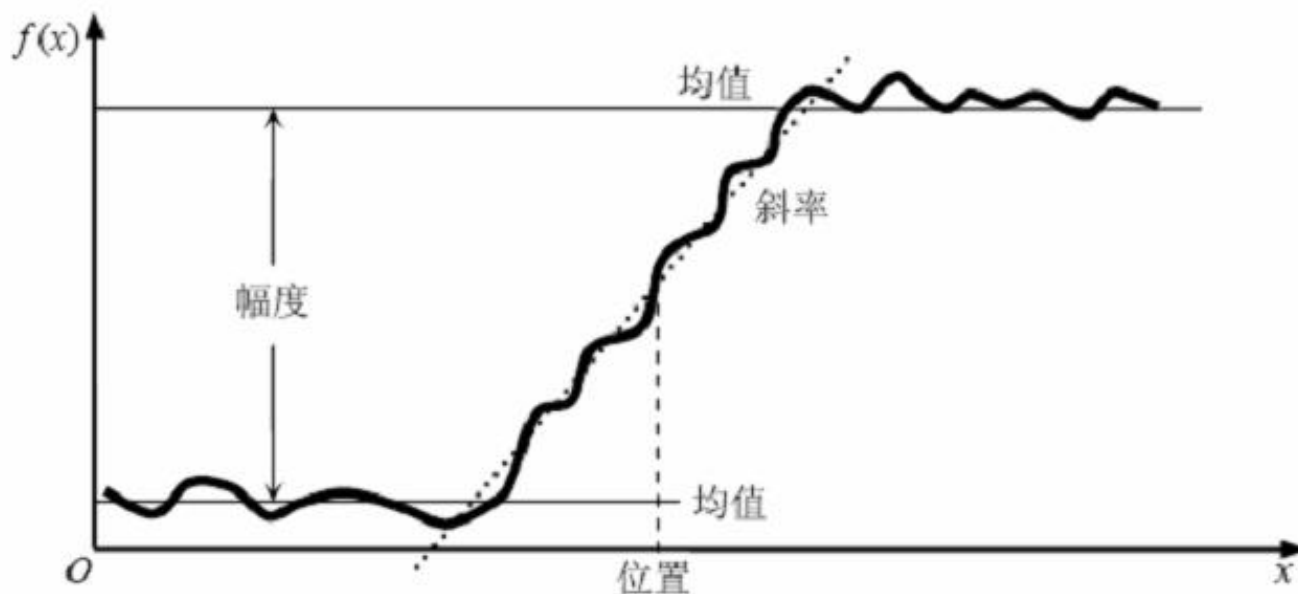


图象（灰度）边缘模型及其一阶、二阶导数

边缘模型

□ 描述边缘的参数

- 位置：边缘（等效的）最大灰度不连续处
- 朝向：跨越灰度最大不连续的方向
- 幅度：灰度不连续方向上的灰度差
- 均值：属于边缘的像素的灰度均值
- 斜率：边缘在其朝向上的倾斜程度



边缘检测

- 边缘是图象中对象的基本的特征之一，可以通过检测物体边缘来提取所需物体
 - 边缘模型
 - **边缘检测算子**
 - 边缘拟合
 - 边缘搜索
 - 多尺度边缘检测

边缘检测

□ 边缘检测算子

- 正交梯度算子
 - ✓ 梯度算子
- 方向微分算子
 - ✓ Kirsch算子
- 二阶导数算子
 - ✓ 拉普拉斯 (Laplacian) 算子
 - ✓ 马尔 (Marr) 算子
- 最优边缘检测算子
 - ✓ 坎尼 (Canny) 算子
- SUSAN 算子

边缘检测 I: 正交梯度算子

□ 梯度算子：一阶差分算子

$$\text{梯度矢量: } \nabla f(x, y) = [G_x \quad G_y]^T = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \right]^T$$

$$\text{梯度幅值: } \text{mag}(\nabla f) = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}$$

$$\text{梯度方向角: } \varphi(x, y) = \arctan\left(\frac{G_y}{G_x}\right)$$

$$\text{中心差分: } \frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{1}{2} \cdot [f(x+1, y) - f(x-1, y)]$$

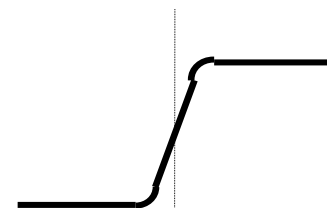
$$\text{前向差分: } \frac{\partial f}{\partial x} \approx f(x+1, y) - f(x, y)$$

$$\text{后向差分: } \frac{\partial f}{\partial x} \approx f(x, y) - f(x-1, y)$$

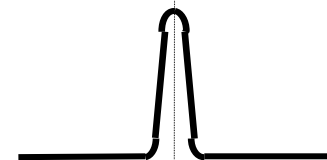
图象



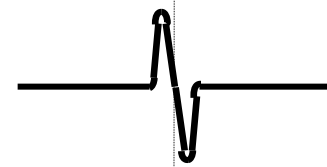
剖面



一阶导数



二阶导数



边缘检测 I: 正交梯度算子

□ 梯度算子：一阶差分算子

- 由于差分运算会放大噪声影响，一般事先对图像做高斯平滑预处理
- ✓ 等价于高斯函数梯度与图像做卷积

$$\mathbf{J}_\sigma(\mathbf{x}) = \nabla[G_\sigma(\mathbf{x}) * I(\mathbf{x})] = [\nabla G_\sigma](\mathbf{x}) * I(\mathbf{x})$$

- ✓ 高斯函数梯度

$$\nabla G_\sigma(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial G_\sigma}{\partial x}, \frac{\partial G_\sigma}{\partial y} \right) (\mathbf{x}) = [-x \quad -y] \frac{1}{\sigma^2} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2} \right)$$

边缘检测 I: 正交梯度算子

□ 梯度算子：利用模板（与图象进行）卷积

■ 模板比较

- ✓ ① 边缘粗细
- ✓ ② 方向性
- ✓ ③ 平滑操作：Prewitt 和 Sobel

1	
	-1

	1
-1	

(a) Roberts

-1		1
-1		1
-1		1

1	1	1
-1	-1	-1

(b) Prewitt

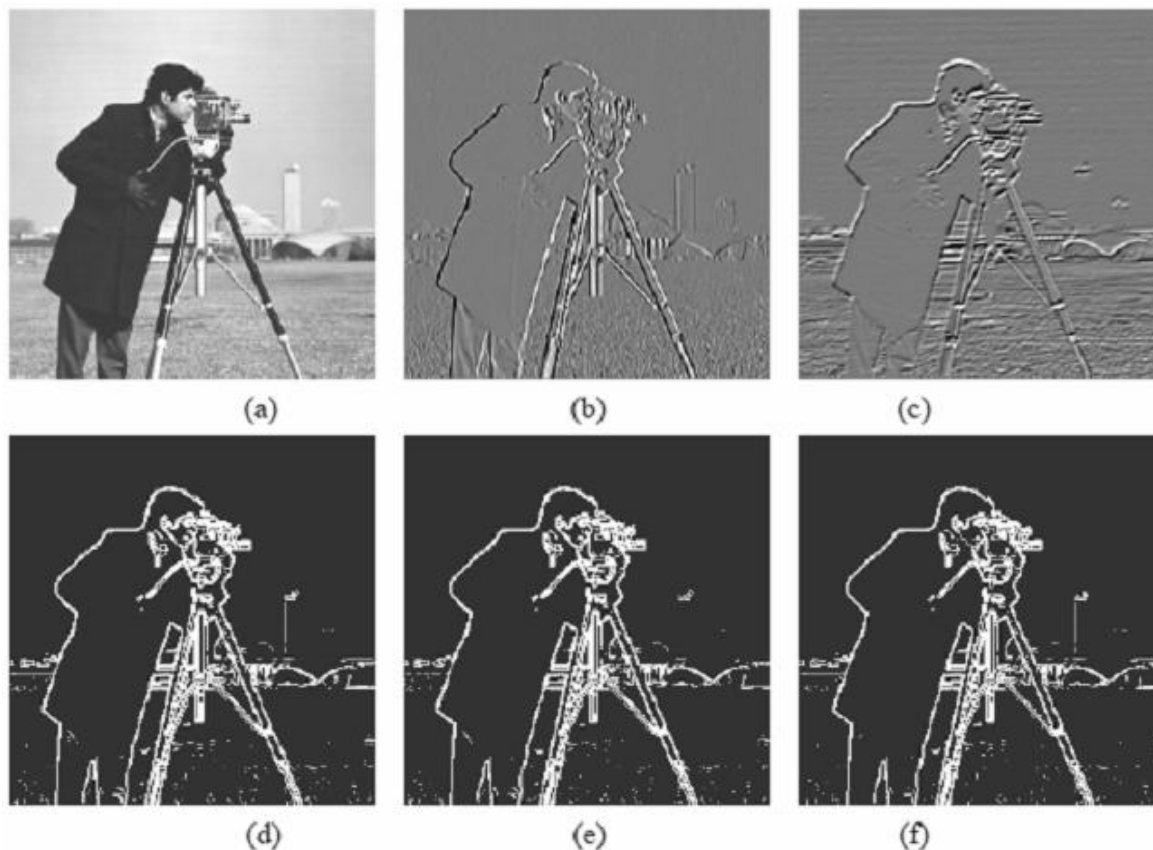
-1		1
-2		2
-1		1

1	2	1
-1	-2	-1

(c) Sobel

边缘检测 I: 正交梯度算子

□ 梯度图示例



a)原图;

d) Sobel梯度图 (范数2)

b) Sobel 水平模板;

e) Sobel梯度图 (范数1)

c) Sobel 垂直模板;

f) Sobel梯度图 (范数 ∞)

边缘检测 II：方向微分算子

□ 基于特定方向上的微分来检测边缘

八方向Kirsch (7×7) 模板

-5	3	3
-5		3
-5	3	3

3	3	3
-5	0	3
-5	-5	3

3	3	3
3	0	3
-5	-5	-5

3	3	3
3	0	-5
3	-5	-5

3	3	-5
3		-5
3	3	-5

3	-5	-5
3	0	-5
3	3	3

-5	-5	-5
3	0	3
3	3	3

-5	-5	3
-5	0	3
3	3	3

边缘检测 II：方向微分算子

□ 用不同模板对图像进行卷积

1.0	1.0	1.0
-1.0	-1.0	-1.0

(a)

1.0	1.0	0.7
0.8		-0.8
-0.7	-1.0	-1.0

(b)

1.0	0.8	-0.7
1.0		-1.0
0.7	-0.8	-1.0

(c)

-1.0		1.0
-1.0		1.0
-1.0		1.0

(d)

-0.7	0.8	1.0
-1.0		1.0
-1.0	-0.8	0.7

(e)

0.7	1.0	1.0
-0.8		0.8
-1.0	-1.0	-0.7

(f)

- 边缘幅度：卷积值的最大值的绝对值
- 边缘方向：卷积值的最大值的符号
- 模板的对称性 → 模板数减半
- 可将各系数值线性变换到整数值，其中绝对值最小的系数变换为单位值

边缘检测 II：方向微分算子

- 有噪声时：边缘像素常孤立/分小段连续
- 封闭边界（轮廓）：连接边缘像素
- 一种具体方法
 - 利用像素梯度的幅度和方向：
 - ✓ 像素(s, t)在像素(x, y)的邻域

$$|\nabla f(x, y) - \nabla f(s, t)| \leq T$$

$$|\varphi(x, y) - \varphi(s, t)| \leq A$$

边缘检测 III：二阶导数算子

□ 1. 拉普拉斯算子：

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

□ 基于上面定义，离散化近似

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx f_x(x + 0.5, y) - f_x(x - 0.5, y) = f(x + 1, y) - 2f(x, y) + f(x - 1, y)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx f_y(x, y + 0.5) - f_y(x, y - 0.5) = f(x, y + 1) - 2f(x, y) + f(x, y - 1)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x + 1, y) + f(x - 1, y) + f(x, y + 1) + f(x, y - 1) - 4f(x, y)$

□ 几种常用的拉普拉斯算子模板：

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

1	1	1
1	-8	1
1	1	1

边缘检测 III：二阶导数算子

□ 1. 拉普拉斯算子

- 由于涉及二阶微分，对图象中的噪声相当敏感
- 产生双像素宽的边缘
- 滤波结果为标量，不能提供边缘方向的信息



边缘检测 III：二阶导数算子

□ 2. 马尔算子

- 在对函数算二阶微分前，先对图像进行高斯卷积（低通滤波）

$$\mathbf{J}_\sigma(\mathbf{x}) = \nabla[G_\sigma(\mathbf{x}) * I(\mathbf{x})] = [\nabla G_\sigma](\mathbf{x}) * I(\mathbf{x})$$

$$S_\sigma(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \mathbf{J}_\sigma(\mathbf{x}) = [\nabla^2 G_\sigma](\mathbf{x}) * I(\mathbf{x})$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 G_\sigma(\mathbf{x}) &= \left(\frac{x^2 + y^2}{\sigma^4} - \frac{2}{\sigma^2} \right) G_\sigma(\mathbf{x}) \\ &= \left(\frac{x^2}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2} \right) G_\sigma(x)G_\sigma(y) + \left(\frac{y^2}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2} \right) G_\sigma(y)G_\sigma(x)\end{aligned}$$

- 上述操作等价于：高斯函数的二阶导数与图像做卷积运算

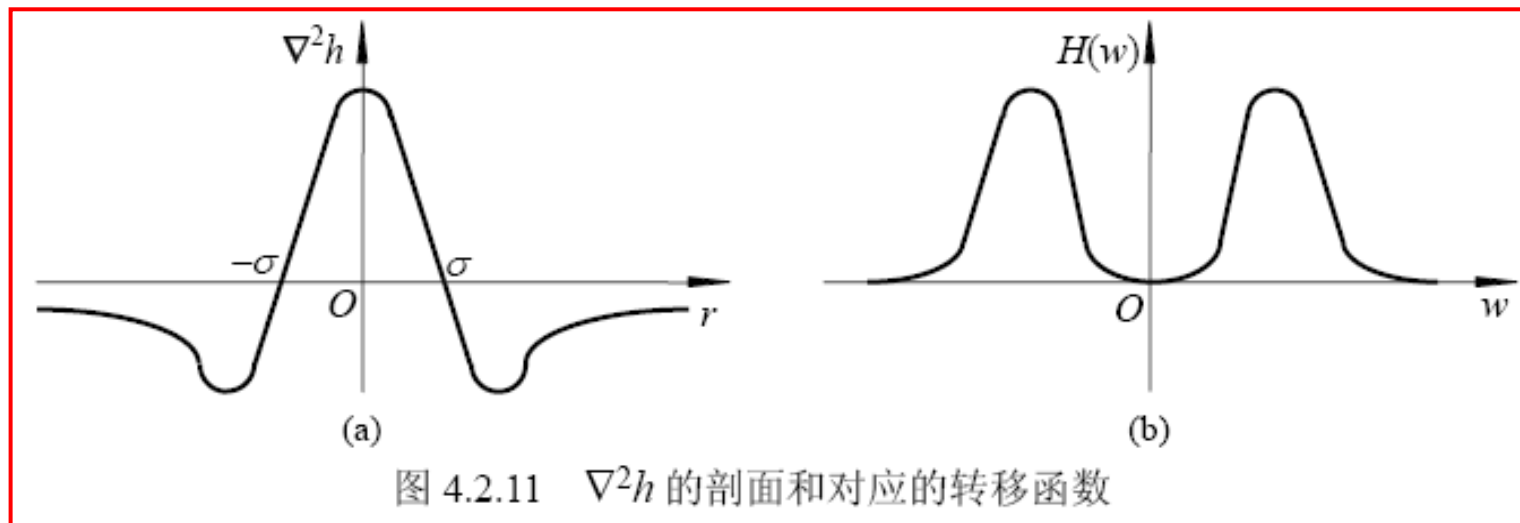
✓ 具体计算过程：

- (1) 用一个2-D的高斯平滑模板与源图象卷积
- (2) 计算卷积后图象的拉普拉斯值
- (3) 检测拉普拉斯图象中的过零点作为边缘点

边缘检测 III：二阶导数算子

□ 2. 马尔算子

- 等价于：高斯函数的二阶导数与图像做卷积运算
- 马尔算子的一维函数及其频谱图：
 - ✓ 中心为零、中频隆起、高频和低频都被衰减的圆对称带通滤波器



边缘检测 IV：最优边缘检测算子

□ 边缘检测器的优化目标：检测可靠、定位准确、响应唯一

01 低失误概率

真实边缘不易漏检，噪声不易被误判为边缘。

最大化信噪比 SNR

$$SNR(f) = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(-x)f(x)dx \right|}{n_0 \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx}}$$

信号相对噪声越强，边缘越容易被可靠检测。

变量的物理意义

$G(x)$	理想边缘灰度信号
$f(x)$	边缘检测滤波器
n_0	输入噪声标准差

02 高定位精度

检测到的边缘位置尽可能接近真实位置。

最大化定位指标 L

$$L(f) = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} G'(-x)f'(x)dx \right|}{n_0 \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} [f'(x)]^2 dx}}$$

滤波响应的峰值位置受噪声扰动越小，定位越准。

变量的物理意义

$G'(x)$	理想边缘的一阶导数
$f'(x)$	滤波器的一阶导数
L	定位性能，越大越好

03 单响应性

同一真实边缘附近尽量避免多个重复响应。

增大噪声峰值平均间距

$$X_{zc}(f) = \pi \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} [f'(x)]^2 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} [f''(x)]^2 dx}}$$

抑制密集的虚假峰值，避免将同一边缘重复检测。

变量的物理意义

$f''(x)$	滤波器的二阶导数
$X_{zc}(f)$	噪声零交叉平均间距
π	圆周率

边缘检测 IV：最优边缘检测算子

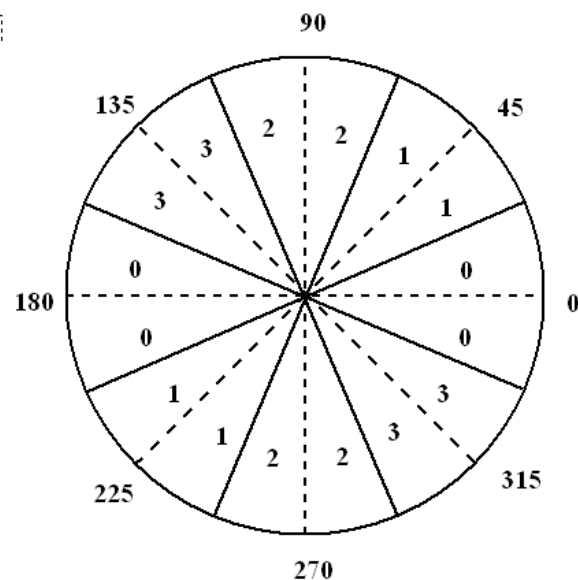
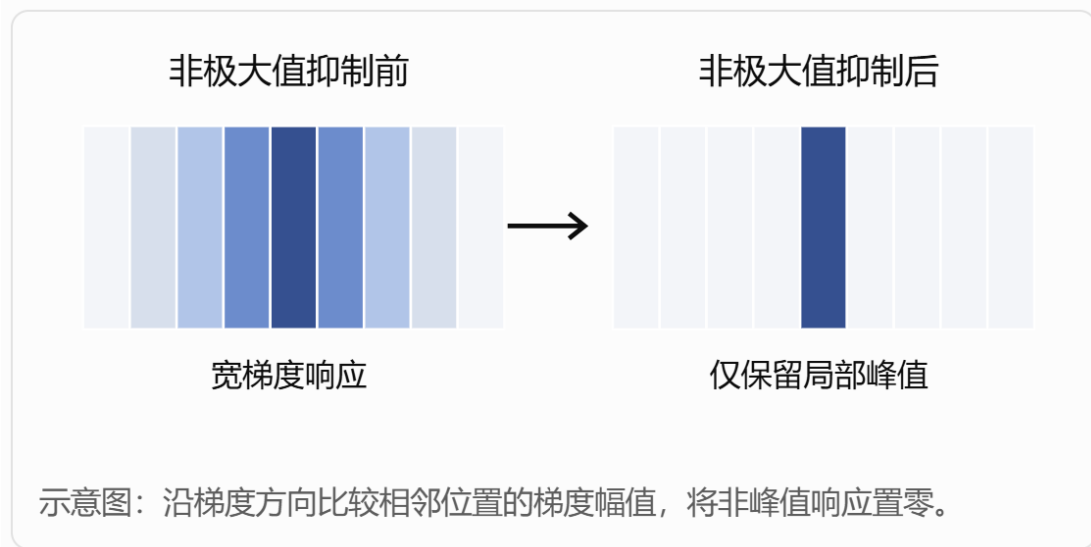
- Canny算子：在抑制噪声的前提下，以单像素精度定位边缘，并利用边缘的连续性剔除虚假响应

步骤	操作	目的
1. 高斯平滑	用高斯核 $G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$ 与图像卷积	去除噪声，避免将噪声误判为边缘
2. 计算梯度	常用Sobel算子计算 G_x, G_y ，得到幅值 $M = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}$ 和方向 $\theta = \arctan(G_y/G_x)$	获取每个点的变化强度和方向
3. 非极大值抑制	对每个像素，比较其幅值与梯度方向上前后两个邻居的幅值。若非最大，则置0	细化边缘，使边缘宽度为1像素
4. 双阈值	设高阈值 T_h 和低阈值 T_l （通常 $T_l = 0.4 \times T_h$ ）。将像素分为强、弱、无三类	初步筛选候选边缘，区分可信边缘与可疑边缘
5. 边缘连接	仅当弱边缘像素与强边缘像素8邻域相连时才保留为最终边缘	连接断裂边缘，同时去除孤立噪声点

Canny算子：非极大值抑制

□ 非极大值抑制 (non-maxima suppression, NMS)

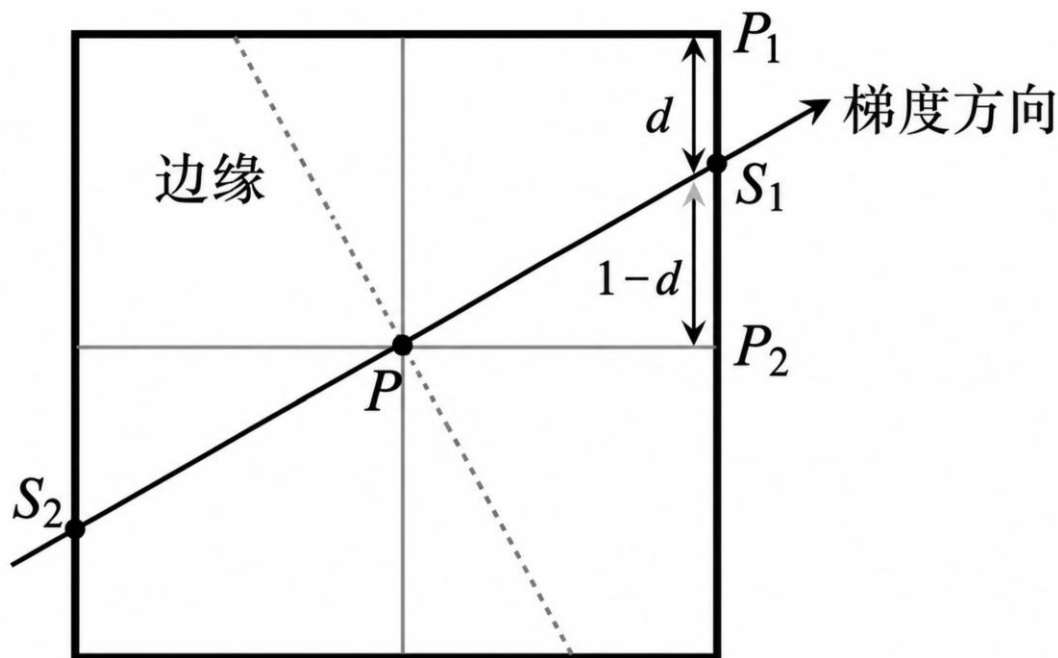
- 细化幅值图像 $M[i,j]$ 中的屋脊带(ridge), 只保留幅值局部变化最大点
- NMS通过抑制梯度线上所有非屋脊峰值的幅值来细化边缘。
- 将梯度角 $\theta[i,j]$ 的变化范围分为四个扇区 $\zeta[i,j]=\text{Sector}(\theta[i,j])$;
- 用 3×3 邻域作用于幅值图像 $M[i,j]$, 邻域中心像素 $M[i,j]$ 与沿着梯度线方向的两个像素进行比较: 若 $M[i,j]$ 不比沿梯度线方向的两个相邻点幅值大, 则 $M[i,j]$ 置零。



Canny算子：非极大值抑制

□ 改进方法：用插值进行非最大消除

- 用插值进行最大值消除：精确但计算量大
- 思路：通过对相邻单元的梯度幅值的插值估计梯度线上的相邻幅值

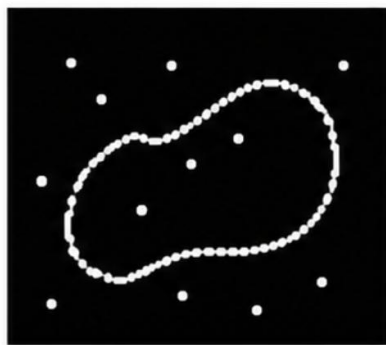


2-D 梯度插值

Canny算子：双阈值算法

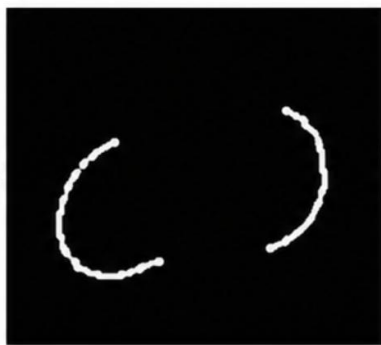
- 定义阈值 τ_1 和 τ_2 ($\tau_2 \approx 2\tau_1$), 得到两个边缘图像 T_1 和 T_2
 - 边缘图像 T_1 中的边缘点响应值 $\geq \tau_1$
 - 边缘图像 T_2 中的边缘点响应值 $\geq \tau_2$
 - ✓ $T_2[i,j]$ 含有的假边缘少, 但有间断点
- 以 T_2 为指导, 在 T_1 中8邻域点寻找可以连接到轮廓上的点
- 不断在 T_1 收集边缘, 直到将 T_2 中所有的间隙连接起来为止

1 低阈值边缘图 T_1



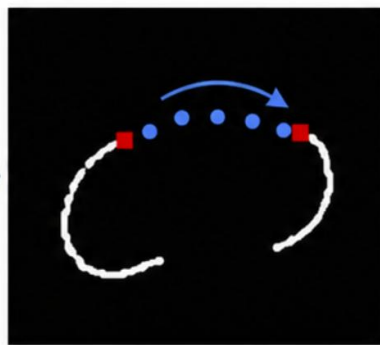
保留较多边缘 (含弱边缘)

2 高阈值边缘图 T_2



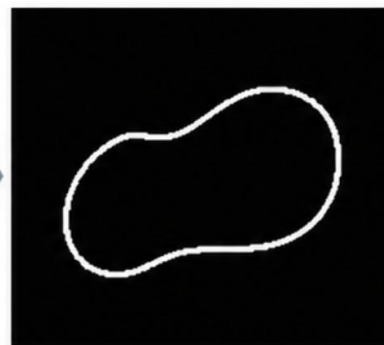
假边缘少, 但有间断

3 8邻域搜索连接



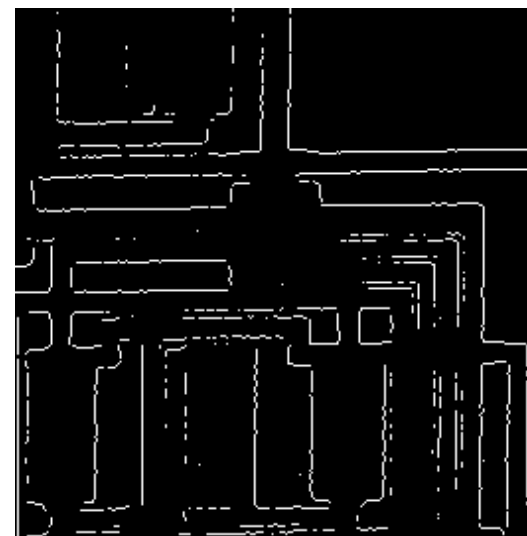
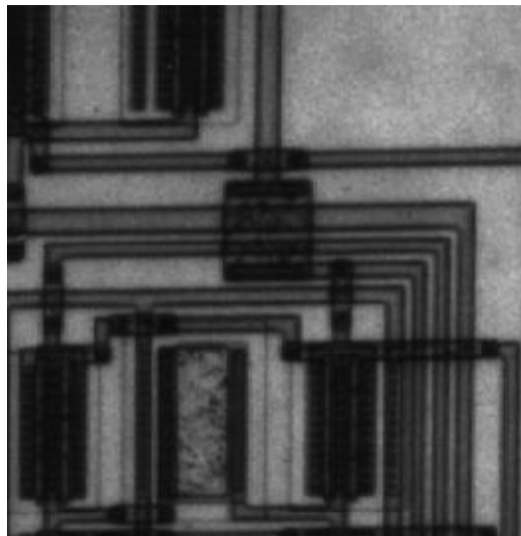
以 T_2 为起点, 在 T_1 中
寻找可连接弱边缘

4 最终连接结果



抑制假边缘, 同时保持
轮廓连续

边缘检测实例对比

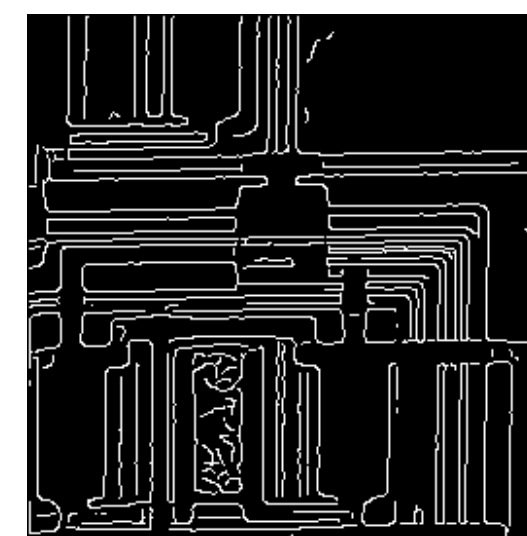


Roberts

Sobel

Log

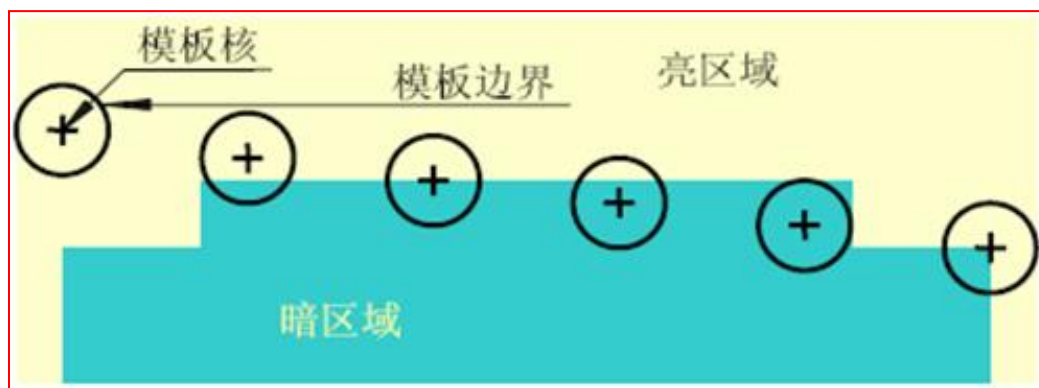
Canny



边缘检测 V: SUSAN算子

□ USAN: Univalve Segment Assimilating Nucleus

- 核同值区：相对于模板的核，模板中有一定的区域与它有相同灰度
- USAN面积携带了关于图象中核像素处结构的主要信息
 - ✓ 当核像素处在图象中的灰度一致区域，USAN的面积会达到最大。
 - ✓ 当核处在直边缘处该面积约为最大值的一半，而当核处在角点处则为最大值的1/4
- 使用USAN面积作为特征起到了增强边缘和角点的效果

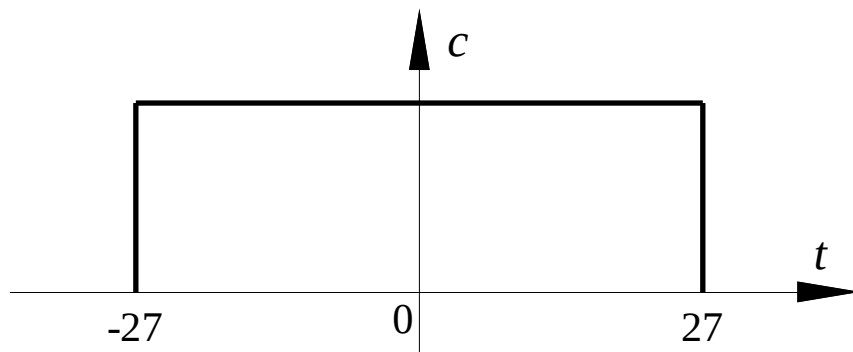
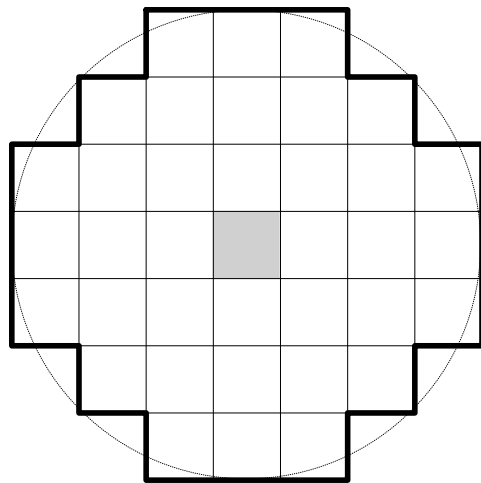


边缘检测 V: SUSAN算子

□ SUSAN: 最小 (Smallest) 核同值区(USAN)

■ 检测模板: 37个像素, 半径为3.4像素

$$C(x_0, y_0; x, y) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } |f(x_0, y_0) - f(x, y)| \leq T \\ 0 & \text{如果 } |f(x_0, y_0) - f(x, y)| > T \end{cases}$$



边缘检测 V: SUSAN算子

- 检测对模板中的每个像素进行
- 得到输出的游程和 (running total)

$$S(x_0, y_0) = \sum_{(x,y) \in N(x,y)} C(x_0, y_0; x, y)$$

- 边缘响应:

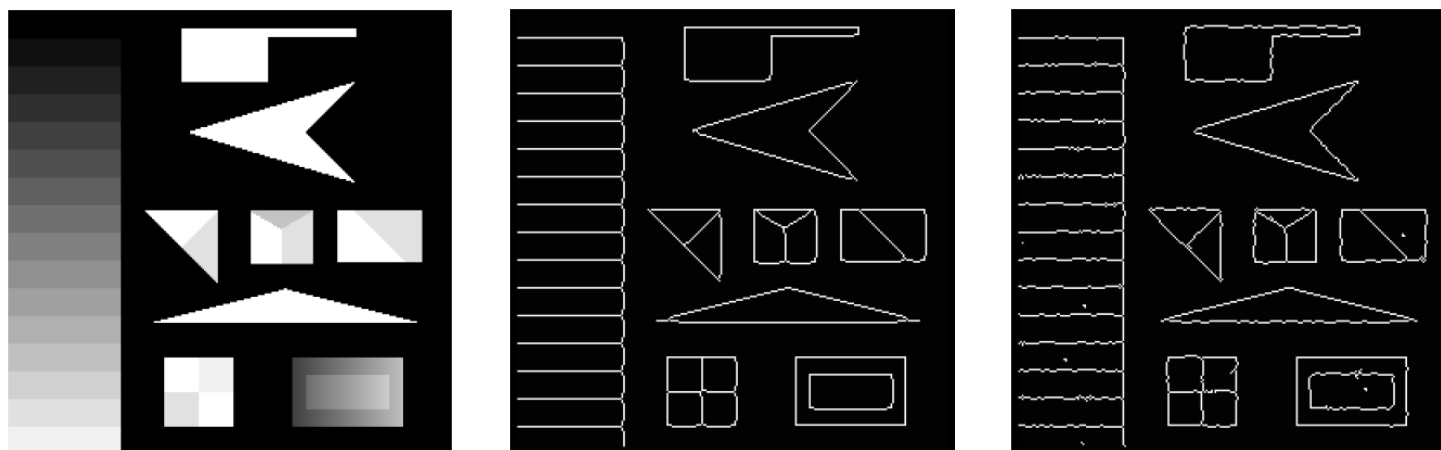
$$R(x_0, y_0) = \begin{cases} G - S(x_0, y_0) & \text{如果 } S(x_0, y_0) < G \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

- 阈值 $G = 3S_{\max}/4$ (为了达到最佳信噪比), 其中 $S_{\max}$ 是 S 所能取的最大值, 即模板面积。
- 物理意义: 核同值区面积越小, 边缘响应值越大

边缘检测 V: SUSAN算子

□ SUSAN算子特点

- 有噪声时的性能较好
 - 不需要计算微分
 - 对面积计算中的各个值求和（积分）
 - 非线性响应特点
- 易自动化实现
 - 控制参数的选择简单
 - 参数的任意性较小



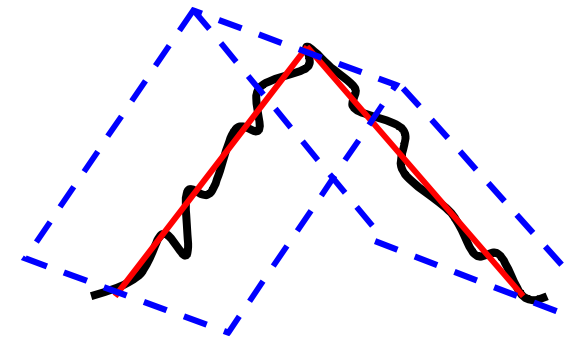
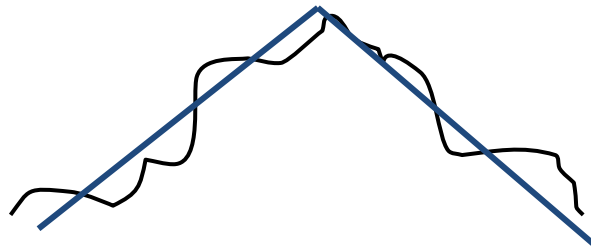
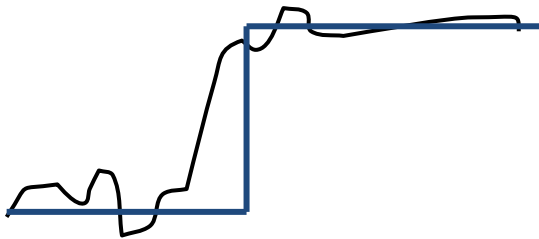
左：原图。 中：SUSAN检测结果。 右：含高斯白噪声的结果。（SNR=0.5）

边缘检测

- 边缘是图象中对象的基本的特征之一，可以通过检测物体边缘来提取所需物体
 - 边缘模型
 - 边缘检测算子
 - 边缘拟合
 - 边缘搜索
 - 多尺度边缘检测

边缘拟合(Edge Fitting)

- 对图象中一个子区域，用理想灰度阶跃或斜变去拟合实际图象数据，从而求出拟合的理想模型参数，如阶跃幅度、斜变倾角等，并以此为这个子区域的边缘强度和方向度量
- 从某种意义上说，拟合本质是一种匹配滤波，旨在从失真和噪声中检测出理想边缘来。因此，有较强的抗噪声能力

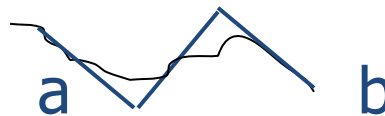
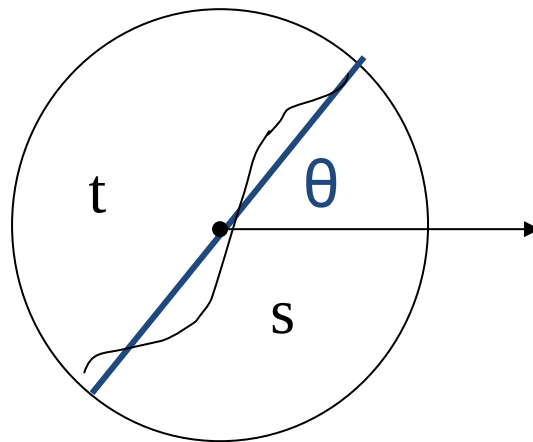
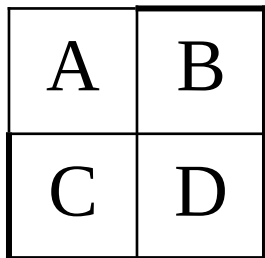


灰度阶跃的拟合

□ 构造原图象（或子图、小区域）的拟合曲面，再在拟合曲面上利用曲面的参数检测出边缘

■ 如：灰度阶跃边缘拟合。

- ✓ 用理想灰度阶跃模型去拟合一个 2×2 的子图
- ✓ 将子图 $f(x,y)$ 展开成基函数表达式。由均方误差最小求边缘幅度和角度



灰度阶跃的拟合

$$H(x, y) = \begin{cases} s & x \sin \theta > y \cos \theta \\ t & \text{其他} \end{cases}$$

A	B
C	D

在第一象限，有：

$$\theta = \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{B-C}{A-D} \right)$$

$$s = \frac{B}{4} - \frac{A-D}{2}$$

$$t = \frac{B}{4} + \frac{A-D}{2}$$

边缘幅度： $|s-t| = |A-D|$

当 θ 在第二象限：

边缘幅度： $|s-t| = |B-C|$

整副图象边缘幅度： $\max\{|A-D|, |B-C|\}$

与Roberts算子的结果相同

基于斜面模型的边缘检测

□ 拟合模型

- 将 $M \times N$ 的数字图象划分为相连接的区域集合 P , $P=(P_1, P_2, \dots, P_i, \dots)$
- P_i 的大小设为 $R \times C$ (通常为 3×3)

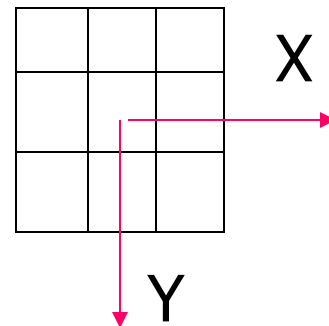
$$\hat{f}(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$$

- 对每一个小区域, 用一个斜平面来近似
- 拟合误差:

$$e^2 = \sum_R \sum_{\times C} [\alpha x + \beta y + \gamma - f(x, y)]^2$$

斜面拟合

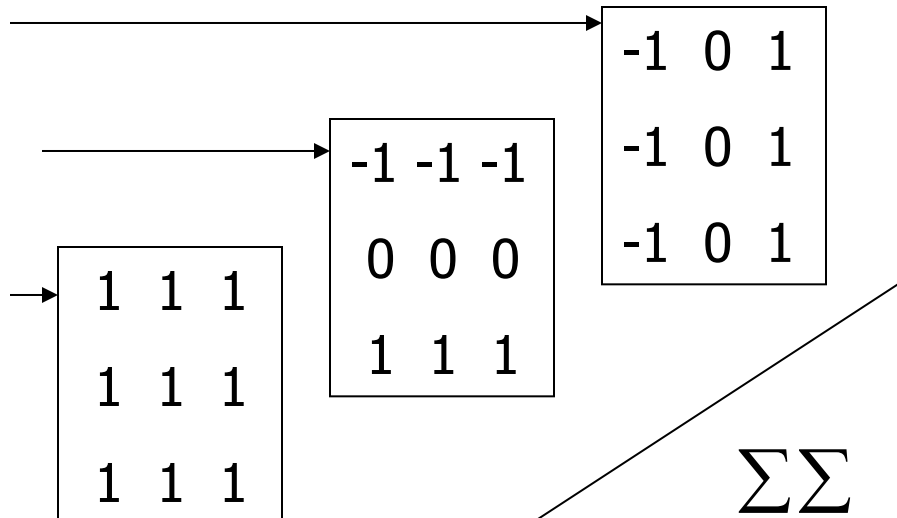
- 由均方误差最小来求 α 、 β 、 γ ,
- 区域 3×3 , 原点取在中心点时, 有:



$$\alpha = \frac{\sum \sum x f(x, y)}{\sum \sum x^2}$$

$$\beta = \frac{\sum \sum y f(x, y)}{\sum \sum y^2}$$

$$\gamma = \frac{\sum \sum f(x, y)}{\sum \sum 1}$$



代入误差算式, 得出误差值。

误差较小时, 认为拟合可靠。

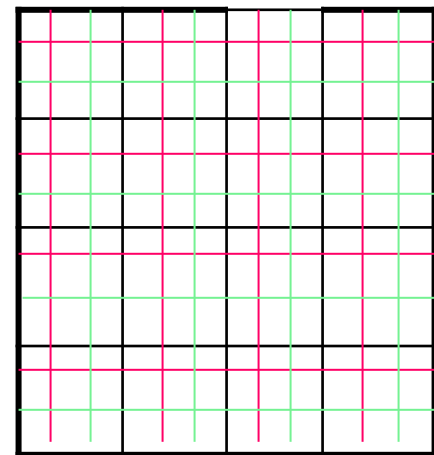
斜面交界的判断

□ 对于“可靠”的斜面，把该拟合斜平面的参数作为小区域的参数（不重叠划分）或小区域中心点的参数（重叠划分）。

□ 有：梯度值为： $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$
方向为： $\theta = \tan^{-1} \frac{\alpha}{\beta}$

□ 然后用斜面参数判断各个斜面间是否有边缘存在

即考察 $\alpha_1 = \alpha_2?$ $\beta_1 = \beta_2?$ $\gamma_1 = \gamma_2?$



基于斜面拟合的边缘检测

□ 一般步骤

- 选取适合的拟合区域
- 根据模型求解拟合系数
- 求拟合斜面各点灰度值
- 计算误差，判断斜面的可靠性
- 对于可靠的斜面，计算相邻点或区域不在同一斜面上的度量
- 选出边缘度量值局部最大的点，定为边缘点

边缘搜索：跟踪方法

□ 跟踪的一般步骤：

- 确定搜索的起点，对于边缘跟踪，则起点是某一边缘点
 - ✓ 真实物体的边缘通常在空间上具有连续性，而噪声的边缘点往往较孤立
- 采取一种合适的数据结构和搜索机理，在已有边缘点的基础上进行搜索，不断确定新的边缘点
- 规定搜索终止的条件，在满足条件时停止搜索

9				8			5
	5				6		4
		9			5		
6			4			7	
	7		6	2		9	
4		6			4		7
		5		2	6		
6	4				7		

$$T_d = 7$$

$$T_t = 4$$

边缘搜索：图搜索

□ 基本概念

- 边界点和边界段可以用图结构标示，通过在图中搜索达到某一目标的最佳路径（最短路径，最小消耗路径）寻找边缘。
- 路径评价函数可以定义为： $f(n)=g(n)+h(n)$
 - ✓ n : 搜索过程进行到的当前节点。
 - ✓ $g(n)$: 为从起始节点到当前节点所有路径代价。
 - ✓ $h(n)$: 是当前节点到目标节点将要经过的所有路径的代价
 - 一般为对真实代价 $h(n)$ 的估计值，称为启发项

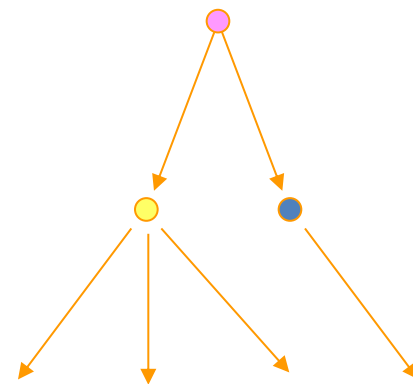
边缘搜索：图搜索

□ 将边缘像素和边界段用图表示

图： $G = \{N, A\}$

结点集 $\{n_1, \dots\}$

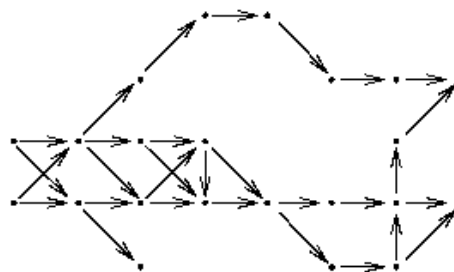
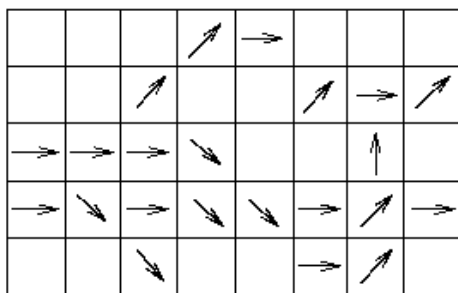
结点对集 $\{(n_i, n_j)\}$



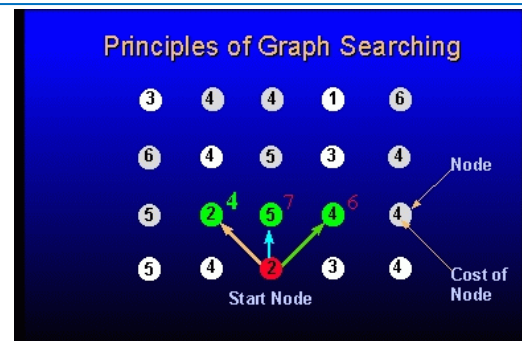
□ 通路代价函数：通常跟灰度值的变化是相关的

$$C = \sum_{i=2}^K c(n_{i-1}, n_i)$$

□ 图的建立



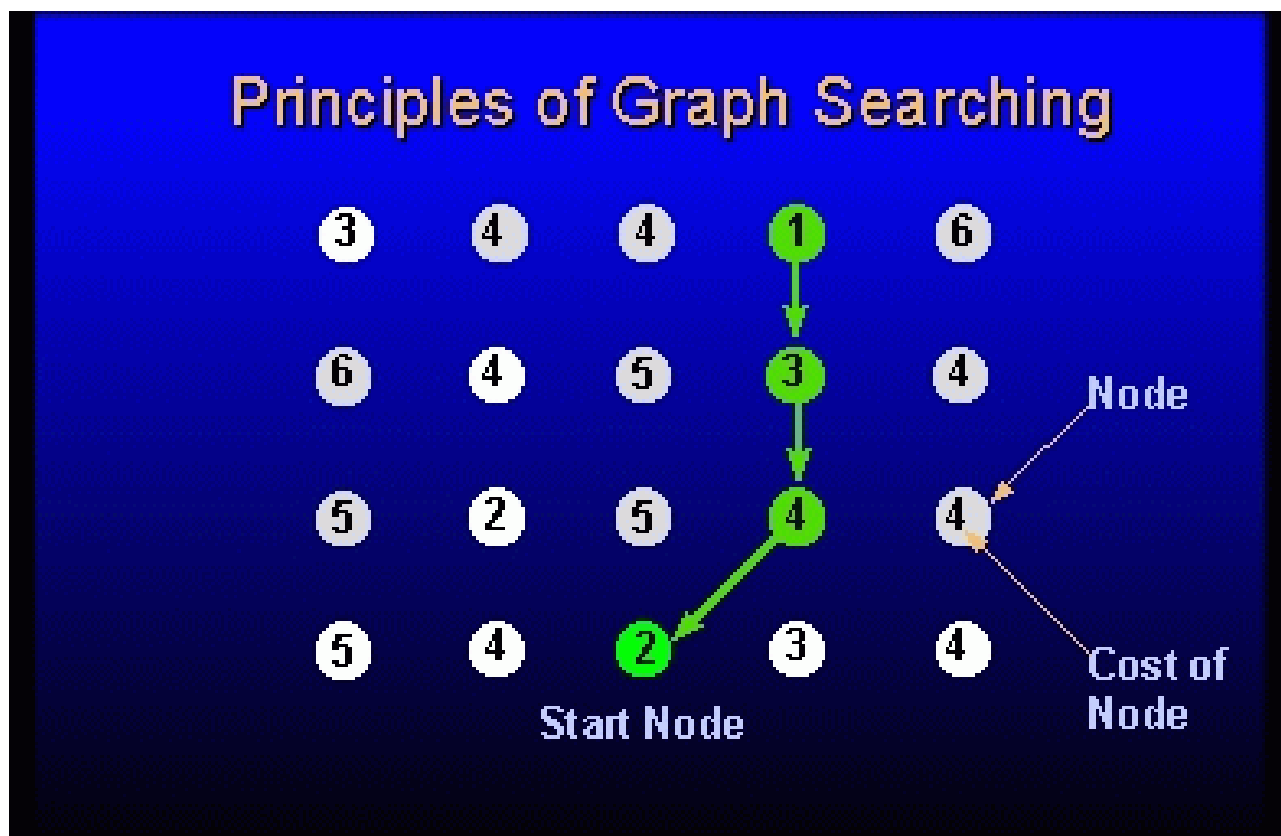
(左) 显著边缘点的方向 (右) 相应的图



Heuristic graph search

1. Expand the starting node n_A and put all its successors into an OPEN list with pointers back to the starting node n_A . Evaluate the cost function f for each expanded node.
2. If the OPEN list is empty, fail.
Determine the node n_i from the OPEN list with the lowest associated cost $f(n_i)$ and remove it. If $n_i = n_B$, then trace back through the pointers to find the optimum path and stop.
3. If the option to stop was not taken in step (2), expand the specified node n_i , and put its successors on the OPEN list with pointers back to n_i . Compute their costs f . Go to step (2).

图搜索实例



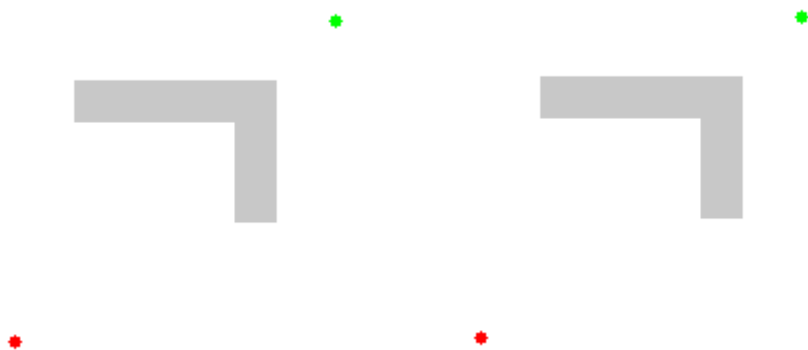
启发式图搜索

□ 利用问题拥有的启发信息来引导搜索，

- 减少搜索范围
- 降低问题复杂度

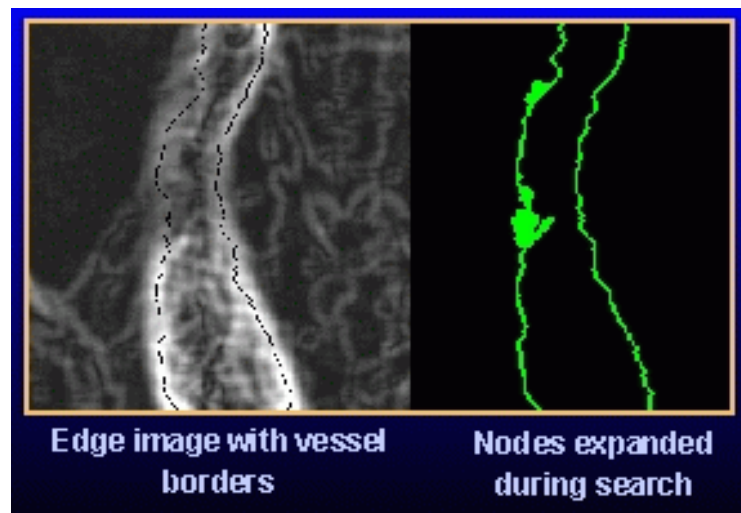
□ 代价函数 $f(n)=g(n)+h(n)$

- 启发项 $h(n)$ 能加快搜索速度，但不一定能找到全局最优。
- 当无启发项 ($h(n)=0$) 时，一定能找到全局最优，但搜索范围加大。



普通搜索过程演示

启发式搜索过程演示



代价函数的设计

- 使用“启发”信息，构造评价函数，计算路径的耗费，是启发式搜索的关键。
- 具体如何构造则的分析该问题的具体情况，将多种因素合理的分离开来，把实际情况中的约束转化为计算机可操作的表达式。
 - 灰度梯度的幅度
 - 灰度梯度的方向
 - 路径的曲率
 - 路径与某一函数的近似程度
 - 到目标点的距离等
 -

多尺度边缘检测

□ 现象

- 大尺度下能较可靠地消除误检，检测到真正边缘点，但定位不准；
- 小尺度定位较准，但误检增加；
- 大尺度检测真正边缘点，小尺度精确定位
- 图像不同的边缘信息会在不同的尺度下表现

□ 方法

- 融合各个尺度的检测结果，获得稳定的边缘信息。

基于二进小波的多尺度边缘检测

用于边缘检测的二进小波:

母函数: $\varphi(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2)/\sigma^2)/2\pi\sigma^2$; (高斯核函数)

小波函数: $\psi^1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$; $\psi^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$;

二进小波变换: $S_{2^j} f \rightarrow \{W_{2^j}^1 f, W_{2^j}^2 f, S_{2^{j+1}} f\}$ (离散算法 α -trous)

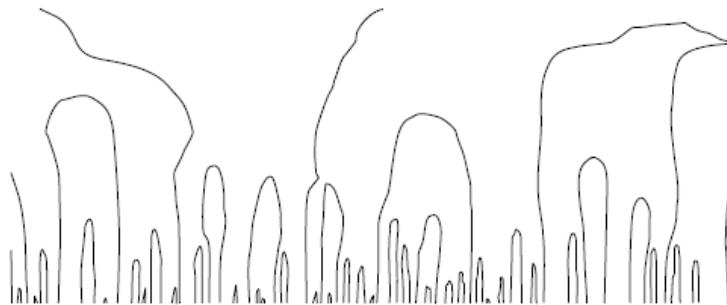
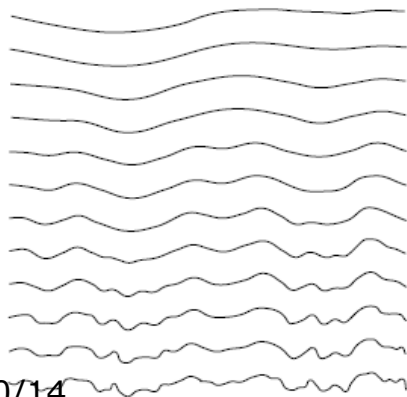
$W_{2^j}^i f = \langle f, \psi_{2^j}^i \rangle$; $i=1, 2$; (分别对应水平和垂直边缘)

$S_{2^{j+1}} f = \langle f, \varphi_{2^j} \rangle$; (平滑信号)

模值 $M_{2^j} f = \sqrt{|W_{2^j}^1 f|^2 + |W_{2^j}^2 f|^2}$; 幅角 $A_{2^j} f = \arctan(W_{2^j}^1 f / W_{2^j}^2 f)$;

模极大链:

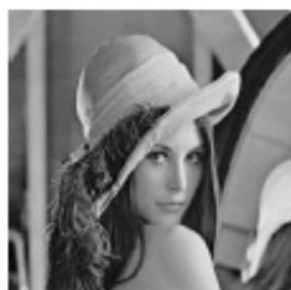
小波系数的模极大值(即导数的过零点), 在尺度空间会形成“向下开口”的连续曲线。



左: 不同尺度的平滑信号

右: 尺度空间的模极大链

基于二进小波的多尺度边缘检测



Wavelet transform along the horizontal direction



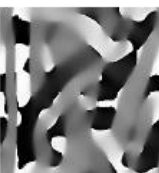
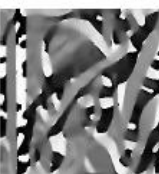
Wavelet transform along the vertical direction



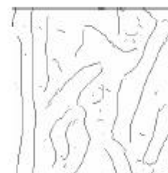
Wavelet transform modulus



Wavelet transform angle for a non zero modulus



Wavelet transform modulus maxima



Wavelet transform modulus maxima after some thresholding



基于二进小波的多尺度边缘检测

□ 算法步骤:

- 1.选择二进小波 $\{\psi^1, \psi^2\}$, 分解级数 J , 和模阈值 T ;
- 2.对图像 f 进行二进小波变换, 得到 $S_{2^J} f$ 和 $\{W_{2^j}^1 f, W_{2^j}^2 f\}_{j=1}^J$;
- 3.计算模值 $M_{2^j} f = \sqrt{|W_{2^j}^1 f|^2 + |W_{2^j}^2 f|^2}$;
- 4.计算幅角 $A_{2^j} f = \arctan(W_{2^j}^1 f / W_{2^j}^2 f)$;
- 5.用非极大值抑制得到小波系数的局部模极大值点;
- 6.把局部模极大值点延尺度连起来, 得到极值链;
7. 利用模阈值 T 和极值链长度阈值, 去除由噪声引起或不感兴趣的边界;