第二章：图像变换+形态学

授课老师：李厚强 (lihq@ustc.edu.cn)
周文罡 (zhwg@ustc.edu.cn)
李　礼 (lil1@ustc.edu.cn)
胡　洋 (eeyhu@ustc.edu.cn)

图像变换

□ 图像变换

- ✓ 可分离和正交图象变换
- ✓ 离散傅立叶变换（DFT）
- ✓ 离散余弦变换（DCT）
- ✓ 沃尔什/哈达玛变换
- ✓ Karhunen-Loeve变换（KLT）
- ✓ 小波变换（DWT）

可分离和正交图象变换

- 1-D变换
  - 正变换

正向变换核

$$T(u)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)h(x,u) \qquad u=0,1,\cdots,N-1$$

  - 反变换

反向变换核

$$f(x)=\sum_{u=0}^{N-1} T(u)k(x,u) \qquad x=0,1,\cdots,N-1$$

可分离和正交图象变换

- 2-D变换

$$T(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)h(x,y,u,v) \quad (1)$$

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}T(u,v)k(x,y,u,v) \quad (2)$$

正向变换核

反向变换核

变换核与原始函数及变换后函数无关

可分离和正交图象变换

□ 可分离

$$h(x,y,u,v)=h_1(x,u)h_2(y,v)$$

1个2-D变换分成2个1-D变换

$$T(x,v)=\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)h_2(y,v) \qquad T(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}T(x,v)h_1(x,u)$$

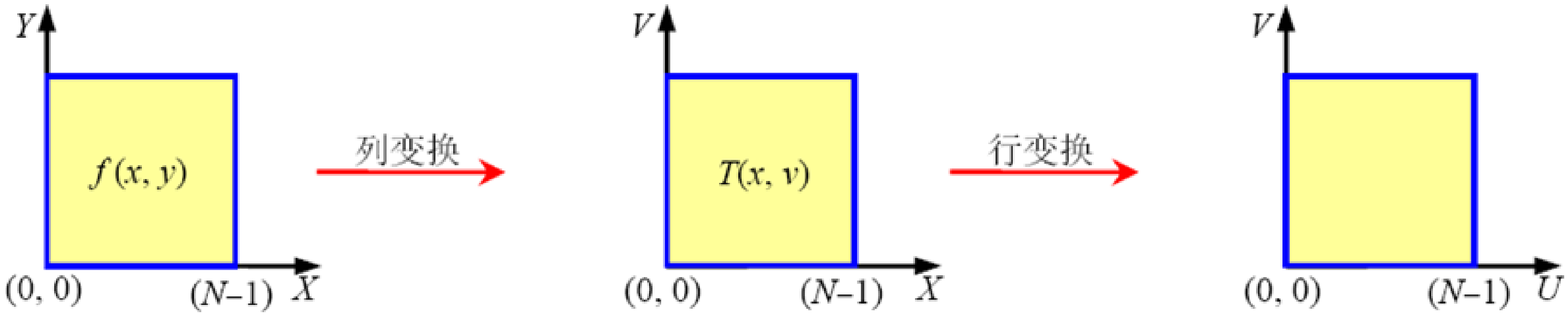
□ 对称

$$h(x,y,u,v)=h_1(x,u)h_1(y,v)$$

(h_1与h_2的函数形式一样)

可分离和正交图象变换

- 具有可分离变换核的2-D变换可以分成两个步骤计算，每个步骤用一个1-D变换



由 2 步 1-D 变换计算 2-D 变换

可分离和正交图象变换

可分离且对称

$$T = AFA$$

- 变换结果：T
- 对称变换矩阵：A
- 图象矩阵：F

$$BTB = BAFAB$$

反变换矩阵：B

$$F = BTB \qquad B = A^{-1}$$

$$\hat{F} = BAFAB \qquad B \neq A^{-1}$$

可分离和正交图象变换

□ 正交

考虑变换矩阵： $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$ $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{BTB}$

酉矩阵（*代表共轭 ）： $A^{-1} = A^{*T}$

如果A为实矩阵，且： $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

则A为正交矩阵，构成正交变换对

离散傅立叶变换（DFT）

- 二维离散傅立叶变换式
  - 对于N×N的二维矩阵（方阵），二维离散傅立叶变换对为：

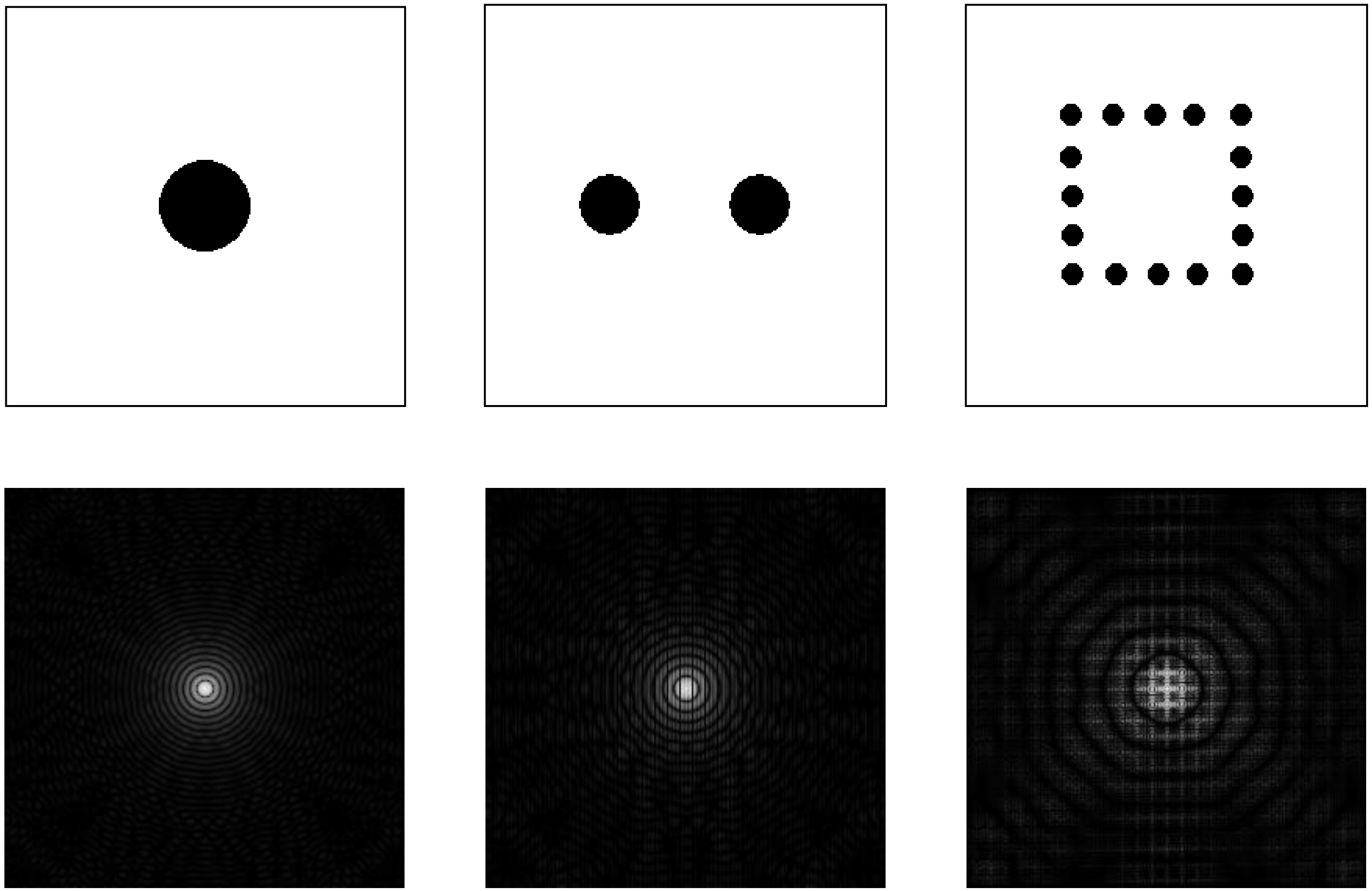
$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp\left\{\frac{-2\pi j(ux+vy)}{N}\right\}$$

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\exp\left\{\frac{+2\pi j(ux+vy)}{N}\right\}$$

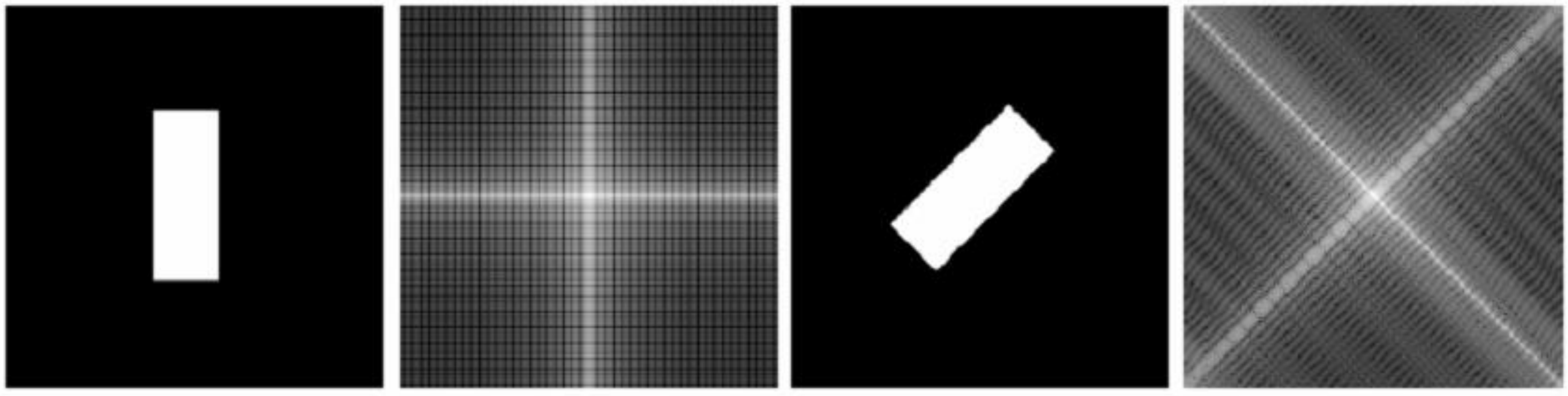
二维DFT的性质

- 线性 $f_1(x,y)+f_2(x,y)$ $F_1(u,v)+F_2(u,v)$
- 比例 $f\ (ax,by)$ $\frac{1}{ab}F(\frac{u}{a},\frac{v}{b})$
- 平移
  $f(x-a,y-b)$ $e^{-j2\pi(au+bv)}F(u,v)$
  $e^{j2\pi(cx+dy)}f(x,y)$ $F(u-c,v-d)$
- 卷积
  $f_1(x,y)*f_2(x,y)$ $F_1(u,v)F_2(u,v)$
  $f_1(x,y)f_2(x,y)$ $F_1(u,v)*F_2(u,v)$
- 旋转
  $f(x\cos\theta+y\sin\theta,-x\sin\theta+ycon\theta)$
  $F(u\cos\theta+v\sin\theta,-u\sin\theta+vcon\theta)$

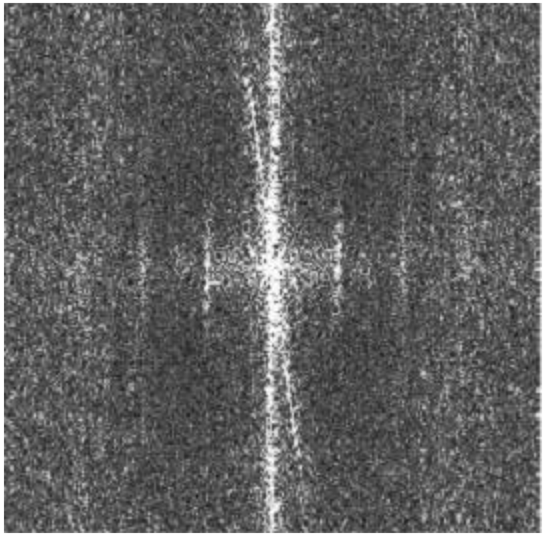
线性叠加及尺度变化



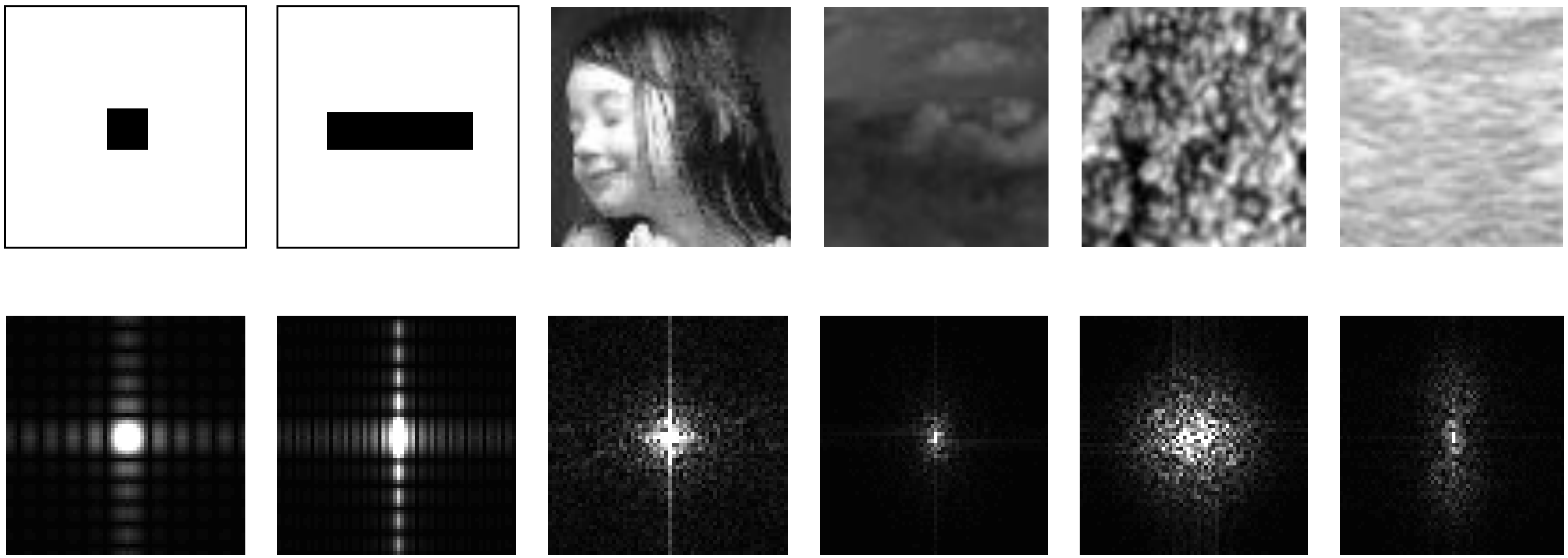
旋转性



实例



典型图象的频谱



离散余弦变换（DCT）

□ 1-D离散余弦变换

$$C(u) = a(u)\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right] \qquad u = 0, 1, \cdots, N-1$$

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} a(u)C(u)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right] \qquad x = 0, 1, \cdots, N-1$$

$$a(u) = \begin{cases} \sqrt{1/N} & \text{当} \quad u = 0 \\ \sqrt{2/N} & \text{当} \quad u = 1, 2, \cdots, N-1 \end{cases}$$

离散余弦变换（DCT）

- 2-D离散余弦变换
- 一种可分离、正交、对称的变换

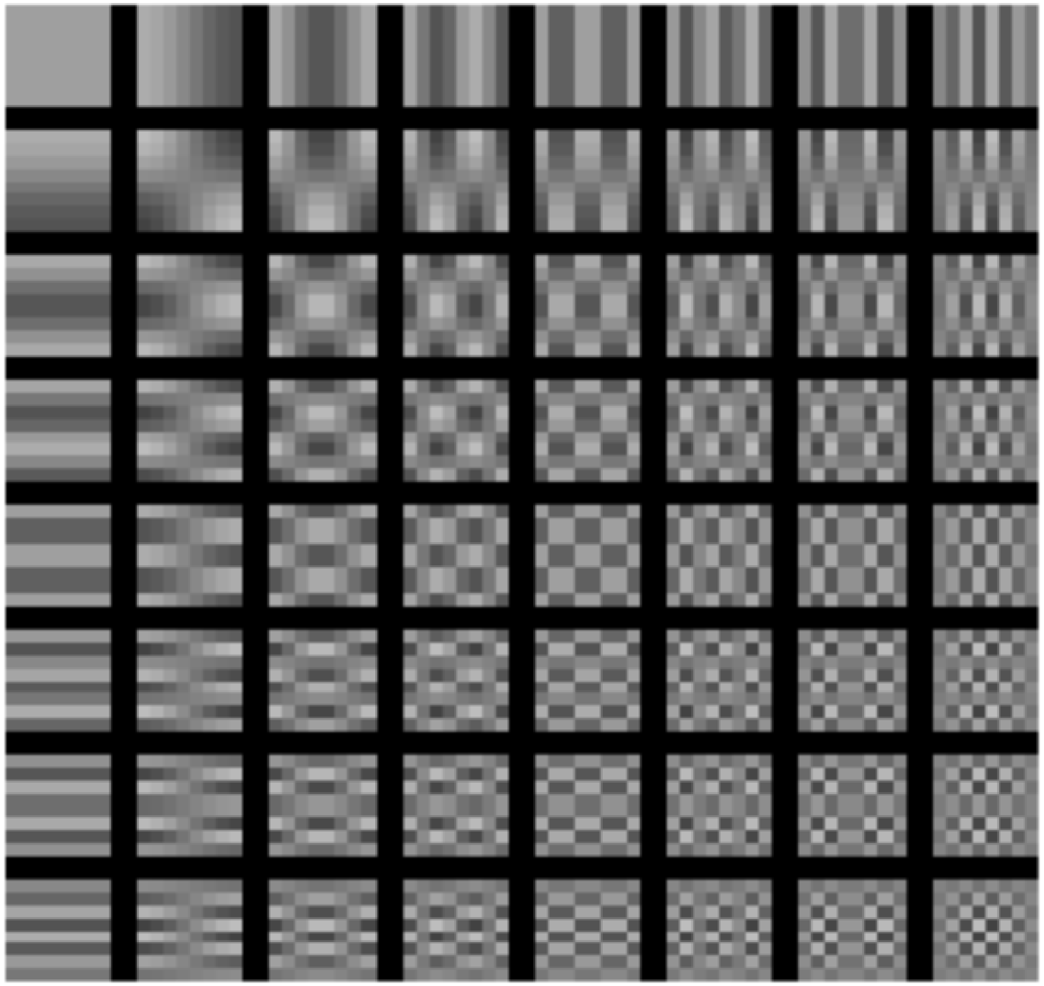
$$C(u,v)=a(u)a(v)\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right]\cos\left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right]$$

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}a(u)a(v)C(u,v)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right]\cos\left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right]$$

讨论可分离性和对称性

$$h(x,y,u,v)=h_1(x,u)h_2(y,v) \quad h(x,y,u,v)=h_1(x,u)h_1(y,v)$$

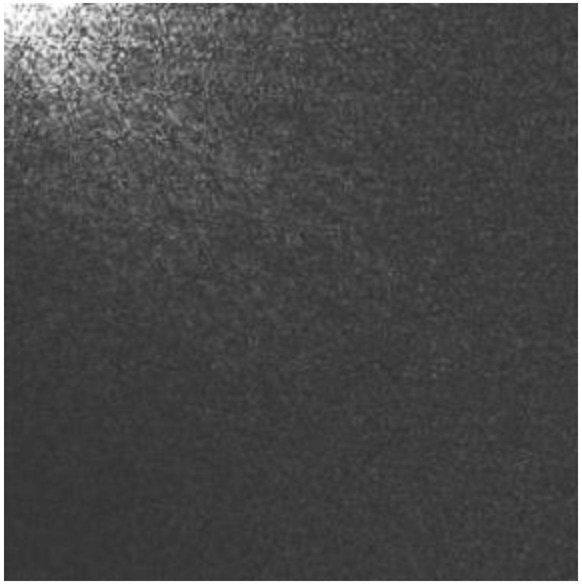
DCT基函数



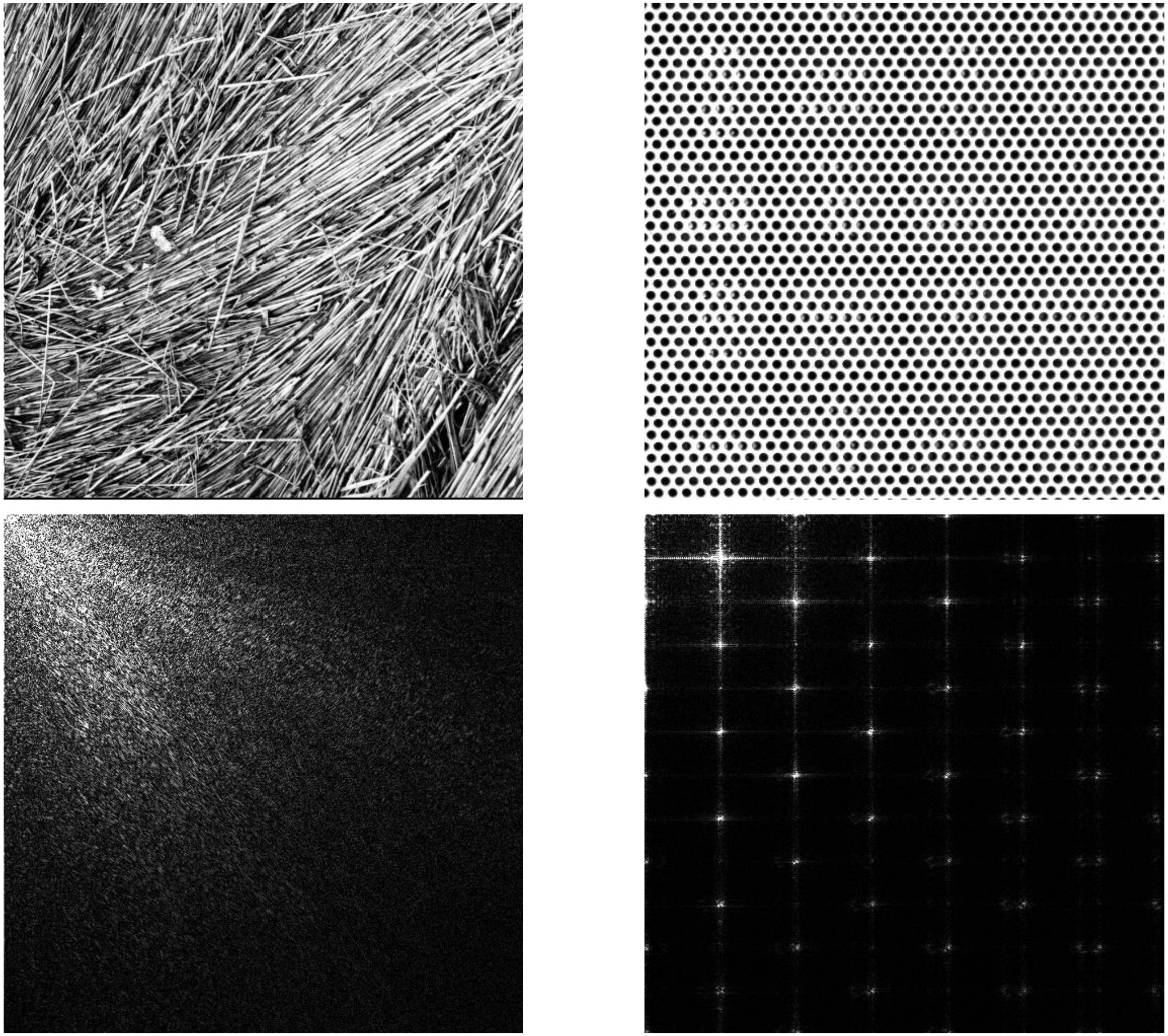
DCT的性质

- 实规范正交基
  - 基向量模长为1
- 与DFT的关系
  - DCT对应实偶函数的DFT
- 有快速算法
  - 比如类似FFT的算法
  - 如果计算某一个特定频率，还有其他更快的方式
- 能量压缩
  - 应用于JPEG压缩编码

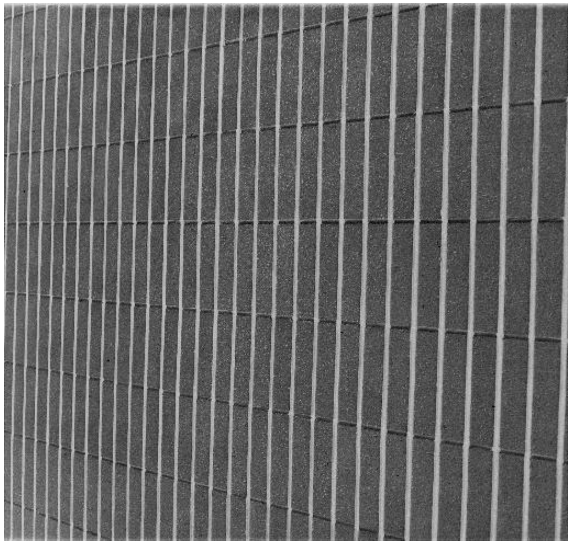
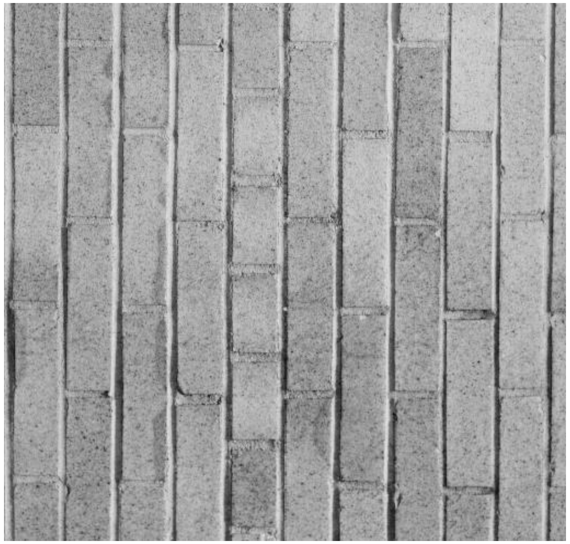
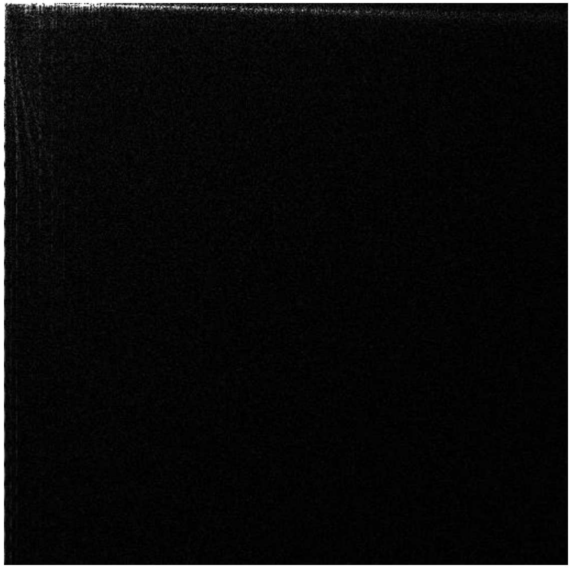
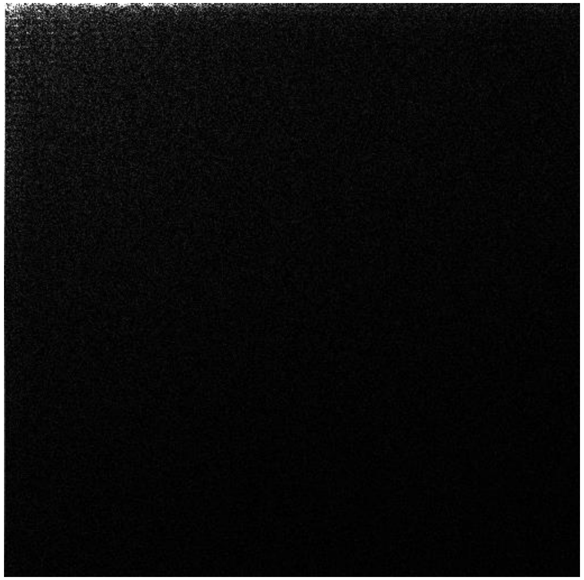
DCT变换结果示例



DCT变换结果示例



DCT变换结果示例

沃尔什/哈达玛变换

- 沃尔什（Walsh）/哈达玛变换，其基函数与DFT和DCT不同，不是正弦形的，而是方波的各种变形
- 在这类变换中，哈达玛（Hadamard）变换在图象处理中应用比较广泛
- 运算简单，只需加减运算
- 缺乏明确物理意义和较直观的解释

哈达玛变换的递推式

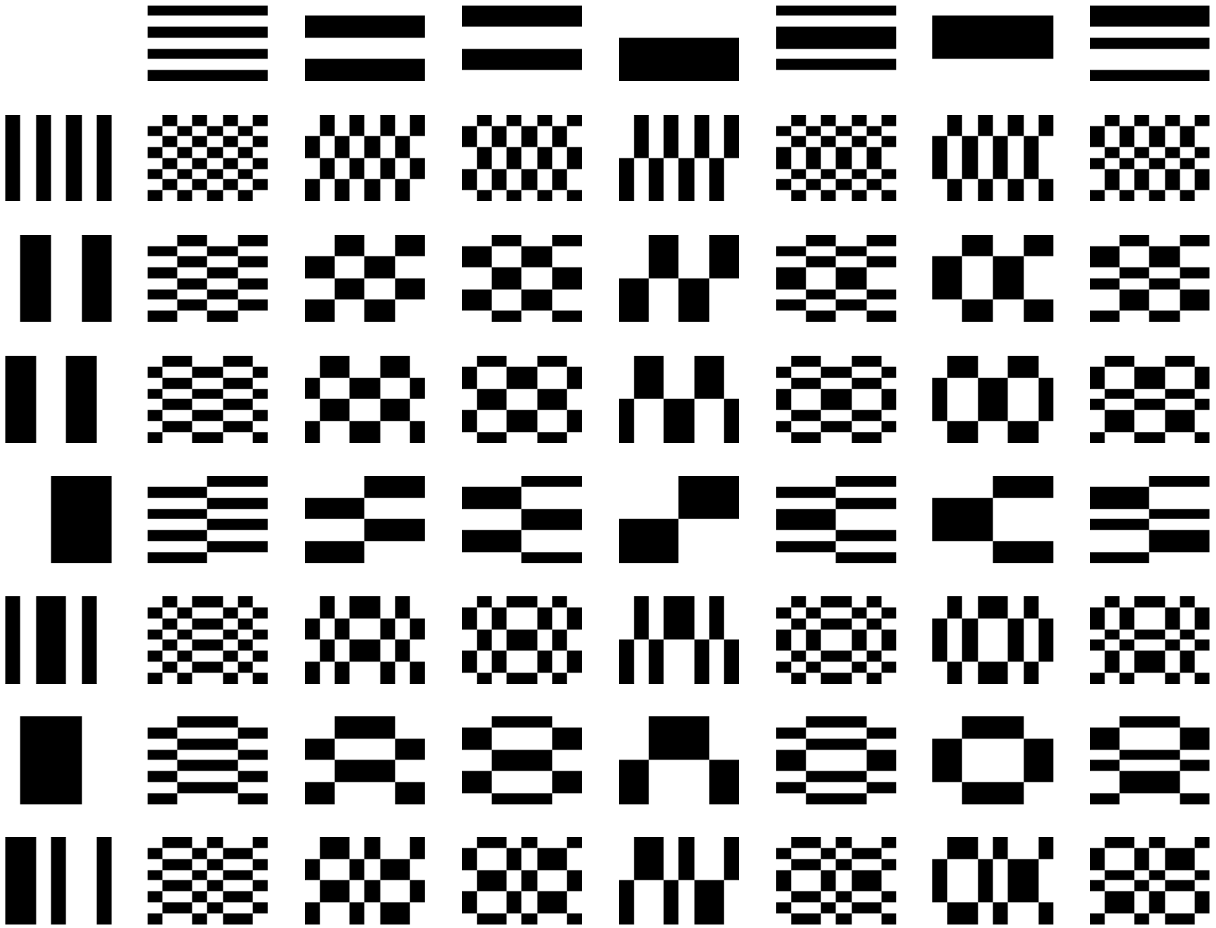
- $2^K \times 2^K$哈达玛递推式：

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_{2N} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} H_N & H_N \\ H_N & -H_N \end{bmatrix}$$

沃尔什/哈达玛变换

基图象



Karhunen-Loeve变换（PCA）

- 优化目标：希望原始数据变换后的表达在每个维度上不存在（线性）相关性，因为相关性意味着数据的不同维度间不完全独立，就必然存在重复表示的信息。即：数据不同维度的协方差为0
- 希望由新的基所得到的数据表达的协方差矩阵中，除对角线上的方差元素外，其余所有的协方差元素全部为0（矩阵对角化）

协方差矩阵及优化目标

- 设原始数据为M个N维向量，首先将数据每个维度减去各自维度的均值，使每个维度的均值都变为0，记为矩阵X（每一列对应一个样本向量）
- 基变换矩阵记为矩阵P，则基变换后的数据可以记为：

$$Y = PX$$

- 显然，Y每个维度的均值也为0。因此，Y的协方差矩阵为：

$$\begin{aligned}
D_Y &= \frac{1}{M} Y Y^T \\
&= \frac{1}{M} (PX)(PX)^T \\
&= \frac{1}{M} P X X^T P^T \\
&= P \left(\frac{1}{M} X X^T \right) P^T \\
&= P D_X P^T
\end{aligned}$$

目标变换矩阵P：能让原始数据协方差矩阵对角化

协方差矩阵及优化目标

- 我们知道：
  - 协方差矩阵D_X是一个实对称矩阵
  - 实对称矩阵不同特征值对应的特征向量必然正交
  - 特征向量构成的变换矩阵可以使协方差矩阵对角化

- P是协方差矩阵D_X的特征向量单位化后按行排列出的矩阵，其中每一行都是D_X的一个特征向量

- 如果P按照特征值从大到小，将特征向量从上到下排列，则用P的前k行组成的矩阵乘以原始数据矩阵X，就得到了我们需要的降维后的数据矩阵Y

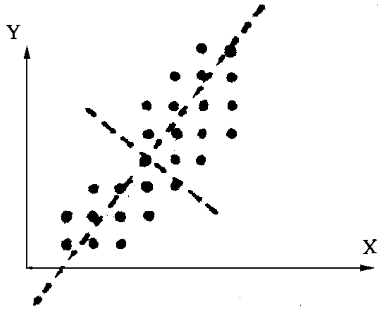
算法步骤

原始数据为M个N维向量：

1. 将原始数据按列组成N行M列的矩阵X；
2. 将X的每一行（每个维度）进行零均值化；
3. 求出协方差矩阵$D_X = \frac{1}{M}XX^T$；
4. 求出D_X的特征值及对应的特征向量；
5. 将特征向量按对应特征值大小从上到下按行排列成矩阵，取前k行组成矩阵P；
6. $Y = PX$即为降维到k维后的数据。

K-L变换一例(1)

图象点序列：



（1，1），（1，2），

（2，1），（2，2），（2，3），

（3，1），（3，2），（3，3），

（4，2），（4，3），（4，4），（4，5），（4，6），

（5，3），（5，4），（5，5），（5，6），（5，7），

（6，4），（6，5），（6，6），（6，7），（6，8），

（7，5），（7，6），（7，7），（7，8）

均值 $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = E\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.4 \\ 4.3 \end{bmatrix}$

协方差 $\Sigma_X = E\left\{\begin{bmatrix} x-\bar{x} \\ y-\bar{y} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-\bar{x} & y-\bar{y} \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 3.286 & 3.099 \\ 3.099 & 4.579 \end{bmatrix}$

K-L变换一例(2)

- 在维数小时，由本征多项式为零求协方差矩阵的本征值：

$$\begin{bmatrix} 3.268-\lambda & 3.099 \\ 3.099 & 4.579-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 7.865\lambda + 5.443 = 0$$

$$\lambda_1 = 7.098 \qquad \lambda_2 = 0.768$$

- 再把本征值代入 $\sum_X \vec{\phi}_i = \lambda_i \vec{\phi}_i$，求出特征矢量：

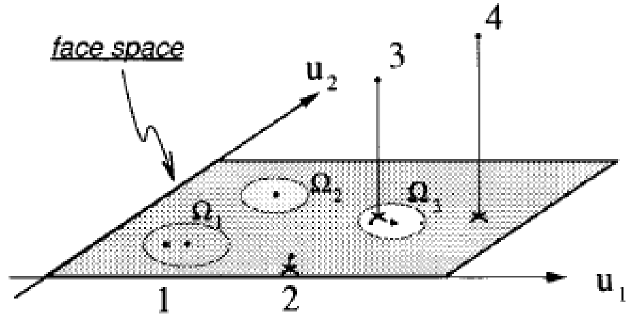
$$\vec{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.23 \end{bmatrix} \qquad \vec{\phi}_2 = \begin{bmatrix} -1.23 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 把相互垂直的二特征矢量作为新的坐标，新坐标的主轴方向为所变换数据方差最大的方向

K-L变换应用实例 —— 人脸识别

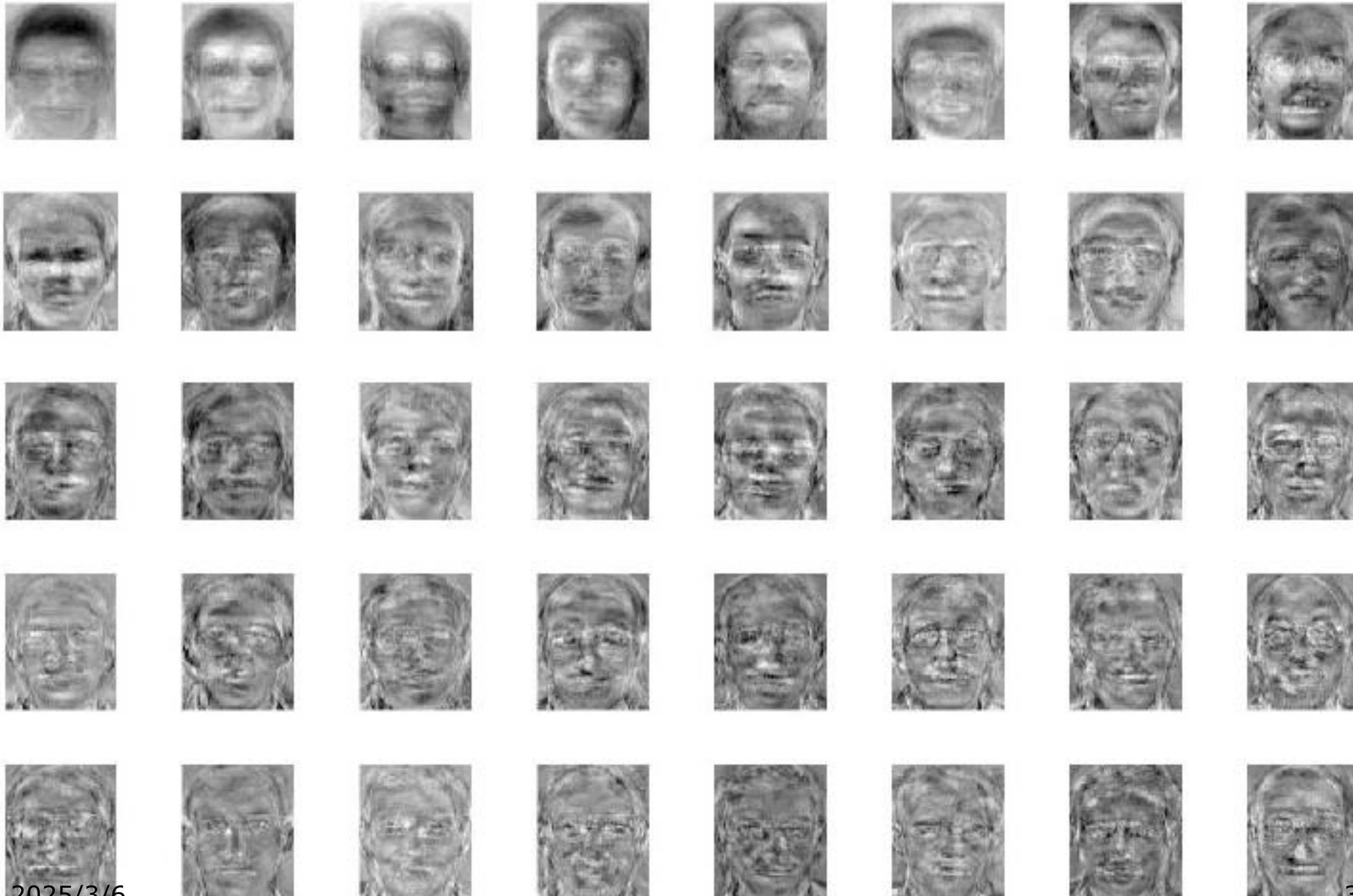
1. 把每一幅人脸列化，视为随机向量*F*的不同实现。
2. 估计*F*协方差矩阵*C*，并计算其特征值特征向量。
   (C是半正定矩阵，维数不大于图像数，对应不同特征值的特征向量正交，特征脸）
3. 选择对应少量最大特征值的特征向量组成特征脸空间
4. 每张脸映射为特征脸空间的点，以其坐标作为特征向量。
5. 采用模式识别方法，进行分类识别。

   （如欧式距离)



人脸库

特征脸

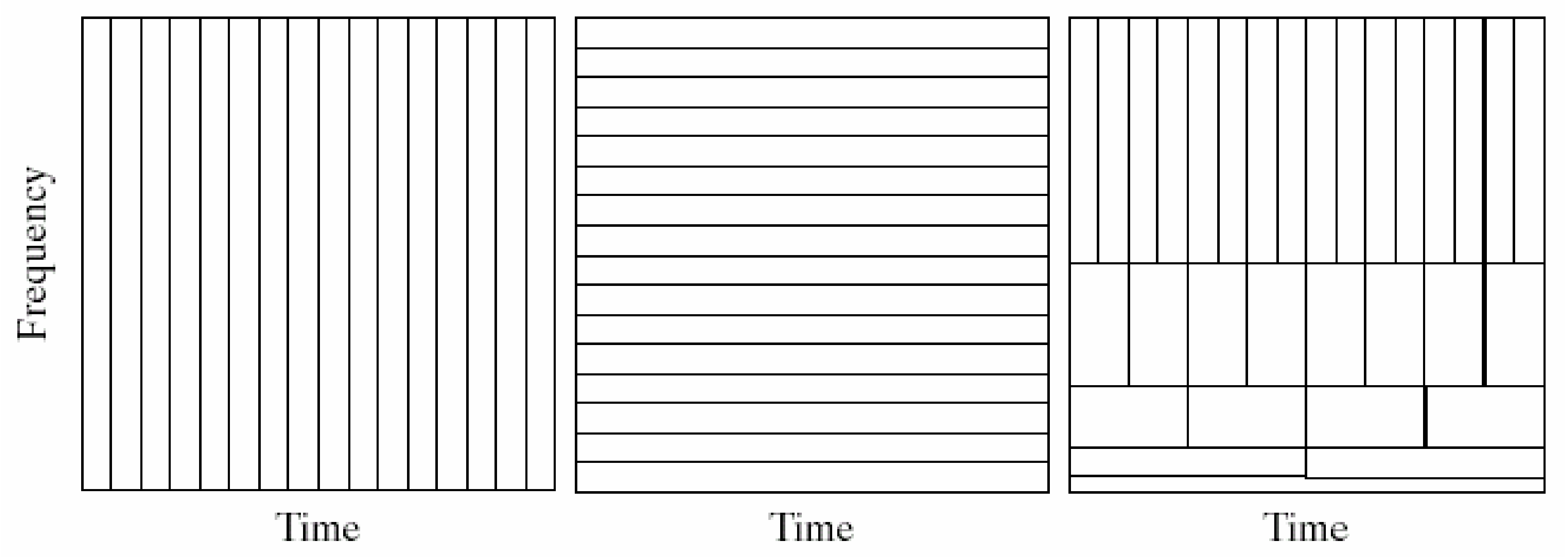


特征脸空间（top 8）

小波变换（DWT）

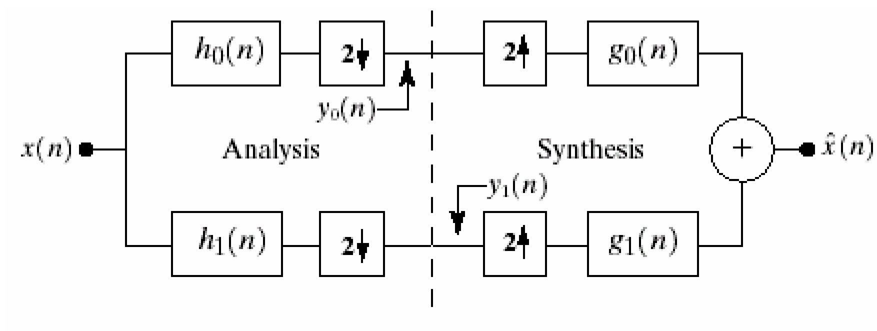
- 傅立叶变换
  - 变换之后丢掉了时域信息
  - 无法定位相应的频率峰值的位置
- 时频域分析
  - 小波变换在二维时频空间分析信号
- 变换
  - 理想的基本小波是过程很短的振荡函数
  - 如同傅立叶变换有连续、离散的变换，小波也有连续、离散的变换

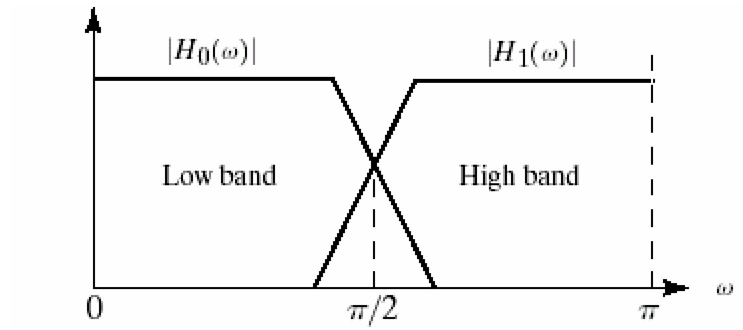
1维离散小波变换

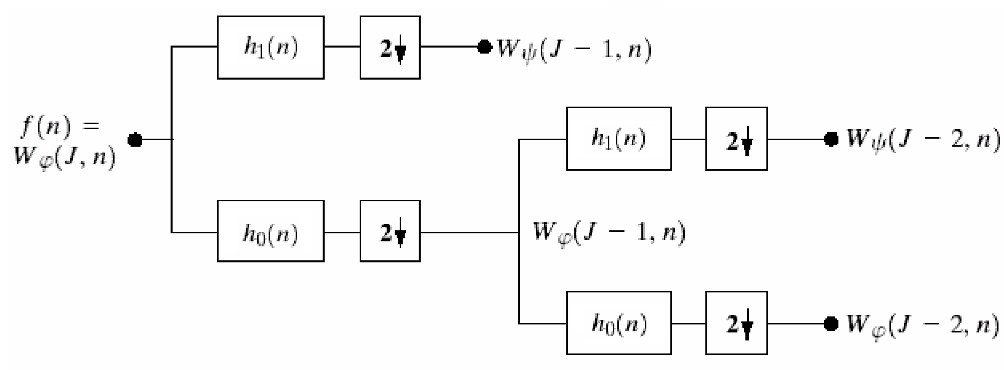


时频铺叠（从左到右：Dirac、Fourier、wavelet）

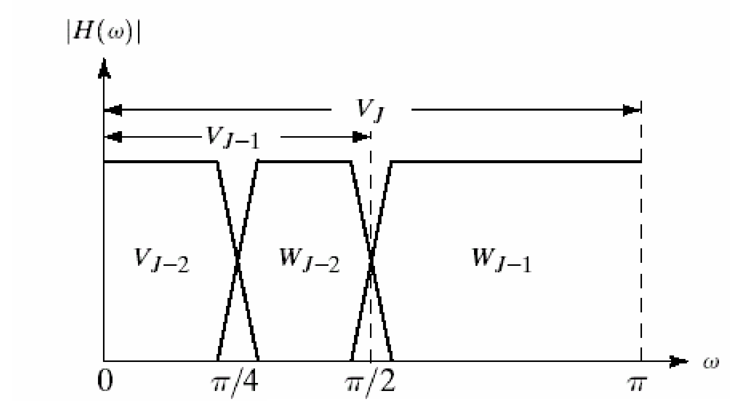
1维离散小波变换



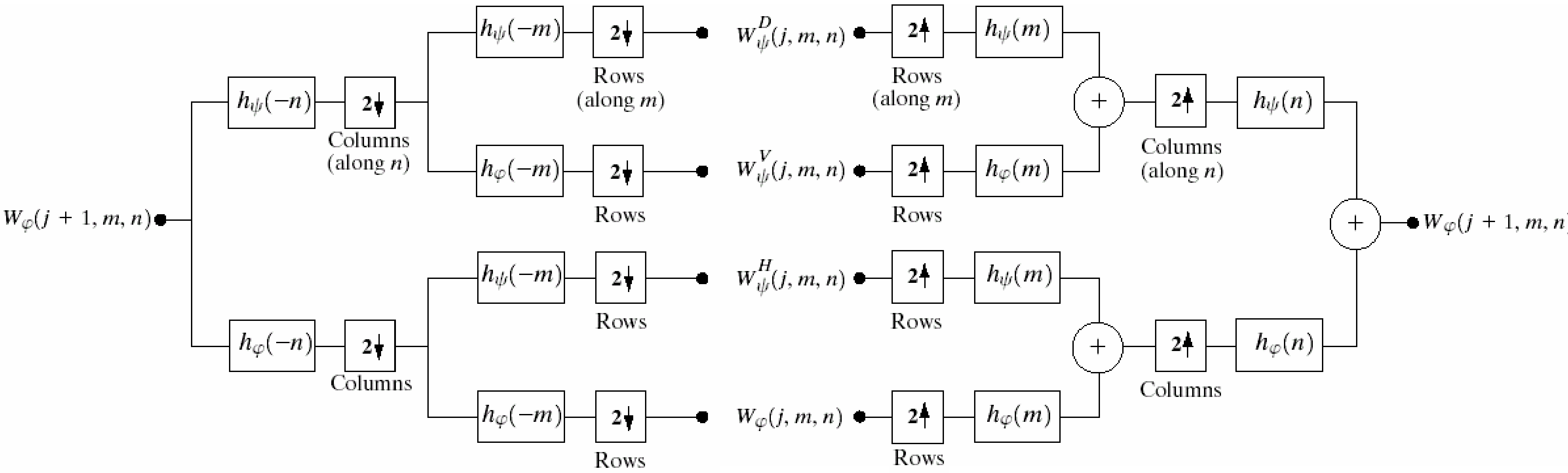


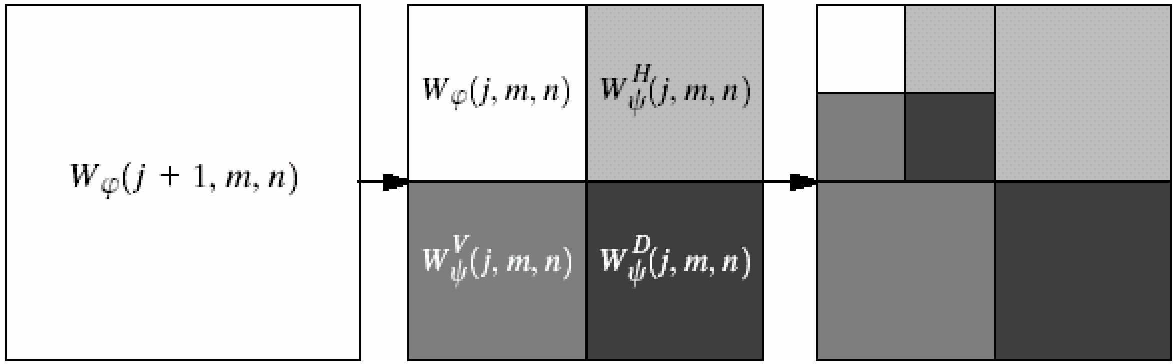


对低频进行
进一步分解

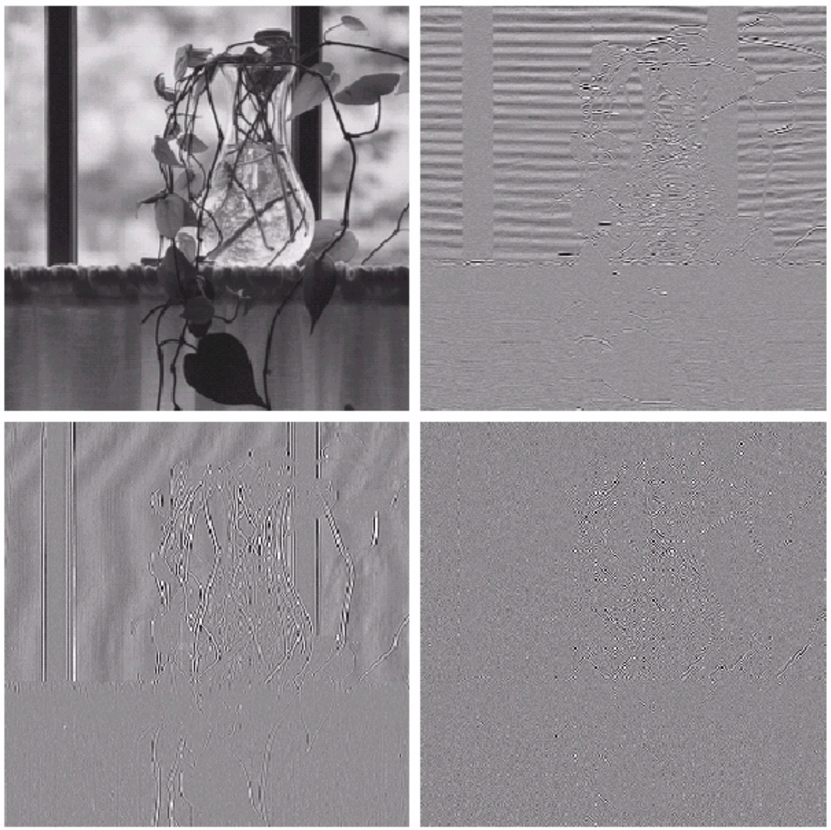


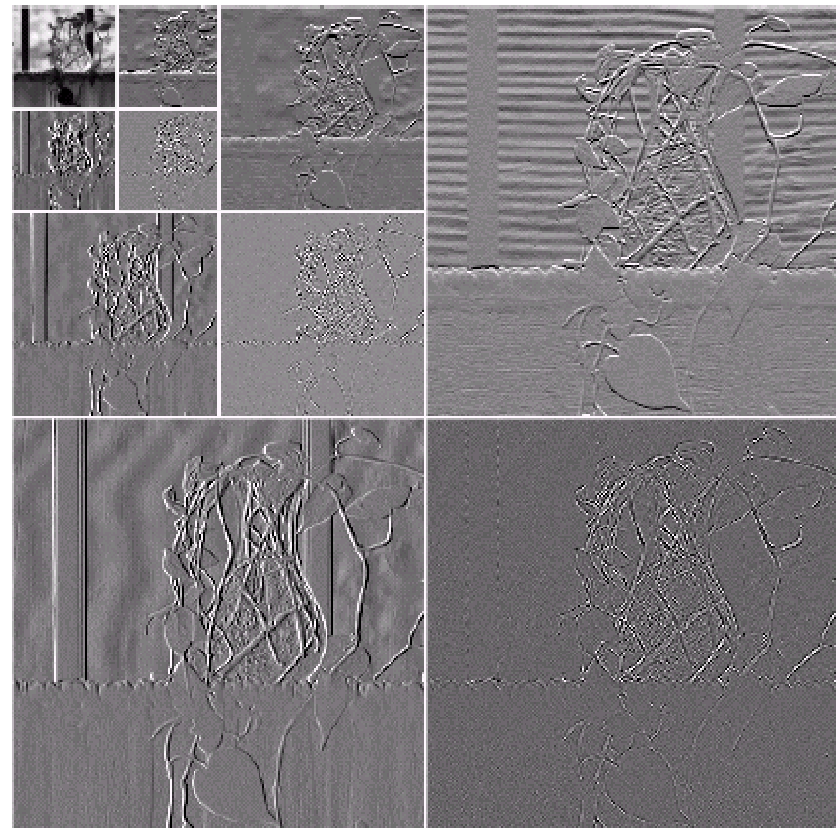
2维离散小波变换


$W_\varphi(j+1, m, n)$
$h_\psi(-n)$
$h_\varphi(-n)$
Columns (along n)
Columns
$h_\psi(-m)$
$h_\varphi(-m)$
Rows (along m)
Rows
$W_\psi^D(j, m, n)$
$W_\psi^V(j, m, n)$
$W_\psi^H(j, m, n)$
$W_\varphi(j, m, n)$
$h_\psi(m)$
$h_\varphi(m)$
$h_\psi(n)$
$h_\varphi(n)$
$W_\varphi(j+1, m, n)$


$W_\varphi(j+1, m, n)$
$W_\varphi(j, m, n)$
$W_\psi^H(j, m, n)$
$W_\psi^V(j, m, n)$
$W_\psi^D(j, m, n)$

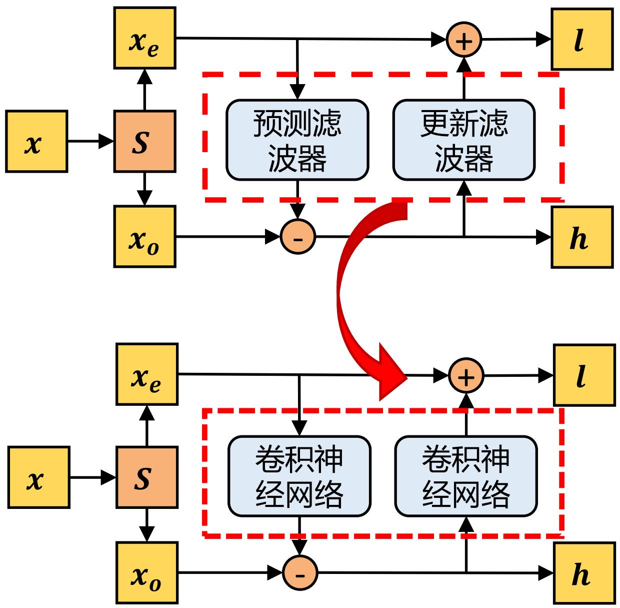
实例





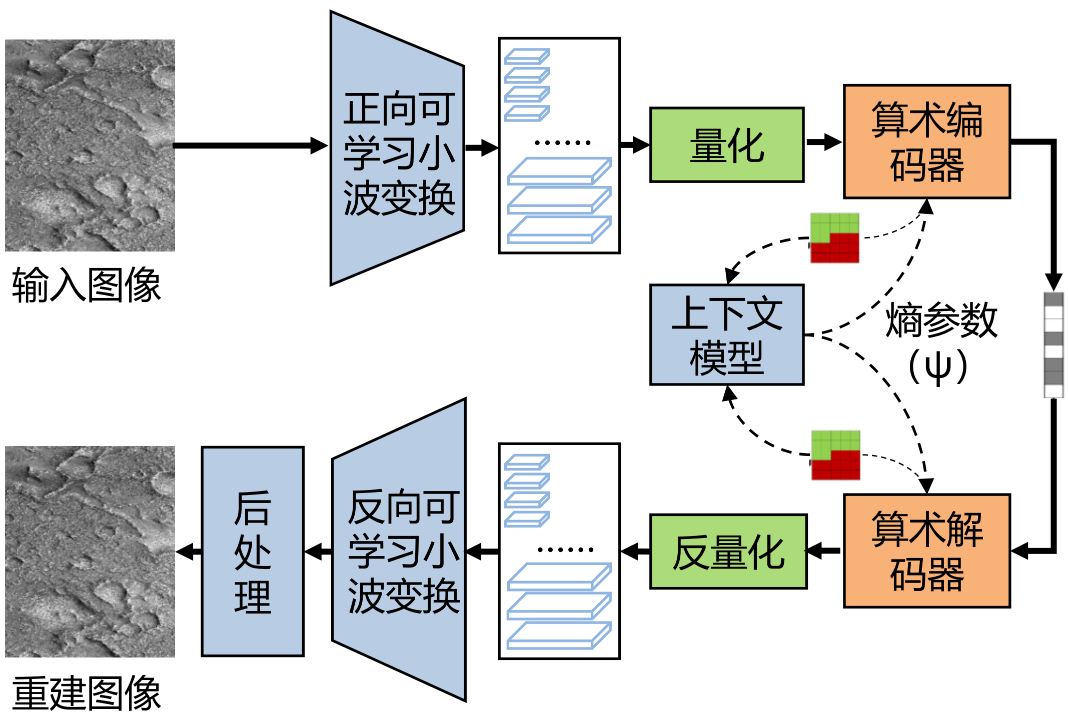
可学习类小波变换

- 将传统小波提升结构中的算子替换为非线性神经网络，建立可学习类小波变换的端到端图像编码框架



传统小波（上）和可学习小波（下）

类小波变换端到端编码框架



Ma, Haichuan, et al. "End-to-end optimized versatile image compression with wavelet-like transform." IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 44.3 (2020): 1247-1263.

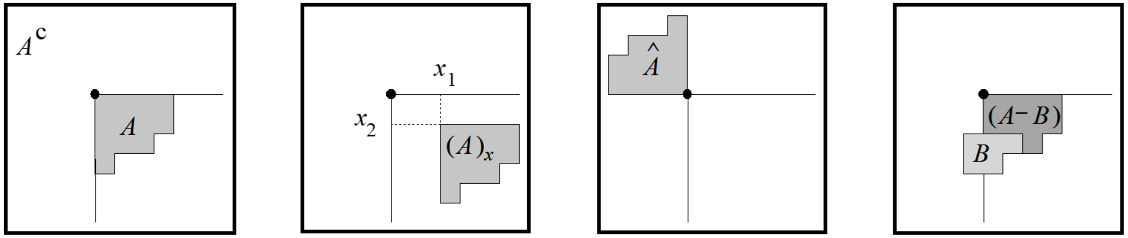
形态学

- 形态学
  - 二值形态学
    - ✓ 基本定义
    - ✓ 基本运算
    - ✓ 实用算法

二值形态学

□ 基本集合定义

- 集合：用大写字母表示，空集记为∅
- 元素：用小写字母表示
- 子集：
- 并集：
- 交集：



(a) (b) (c) (d)

- 补集：$A^c = \{x|x \notin A\}$
- 位移：$(A)_x = \{y|y = a + x, a \in \mathrm{A}\}$
- 映像：$\hat{A} = \{x|x = -a, a \in \mathrm{A}\}$
- 差集：$A - B = \{x|x \in A, x \notin B\} = A \cap B^c$

二值形态学基本运算

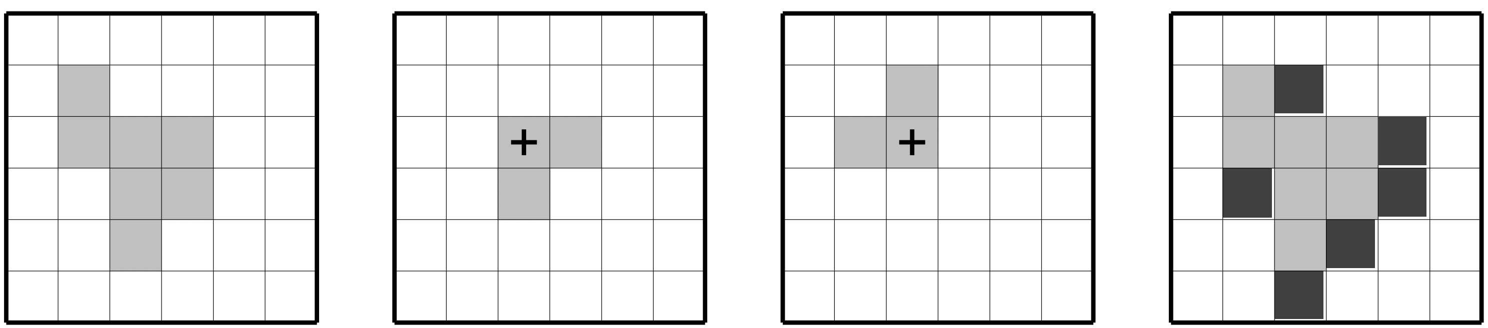
- 集合运算
  - A为图象集合，B 为结构元素（集合）
  - 数学形态学运算是用 B 对 A 进行操作
  - **结构元素要指定1个原点（参考点）**

膨胀和腐蚀

- 膨胀
  - 膨胀的算符为⊕

$$A \oplus B = \{x | [(\hat{B})_x \cap A] \neq \emptyset\}$$

集合A　　结构元素B　　B的映象　　集合$A \oplus B$



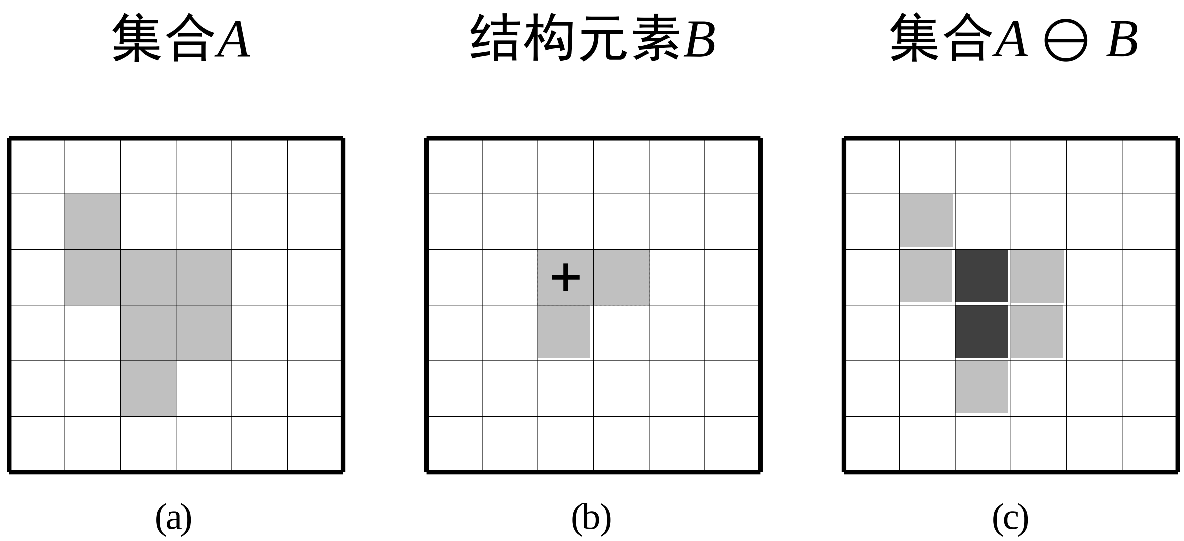
(a)　　(b)　　(c)　　(d)

膨胀和腐蚀

□ 腐蚀

- 腐蚀的算符为⊖

$$A \ominus B = \{x | (B)_x \subseteq A\}$$



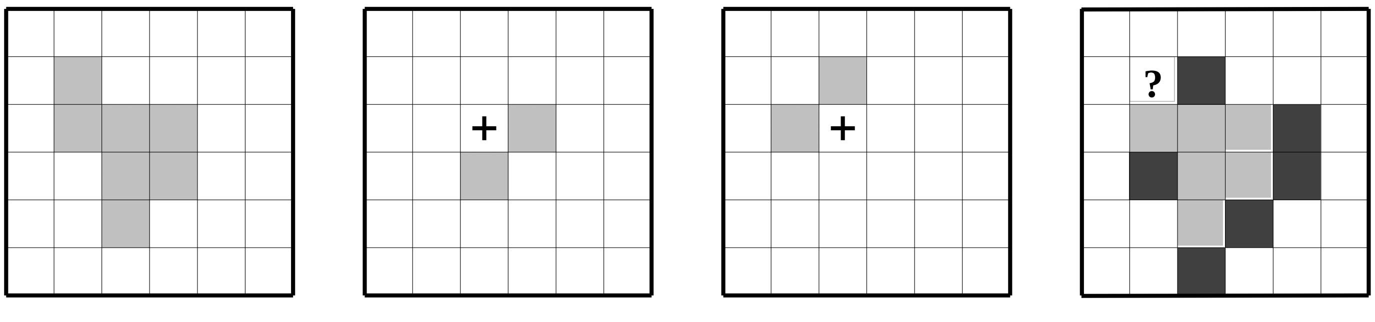
膨胀和腐蚀

- 原点不包含在结构元素中时的膨胀和腐蚀
  - 原点包含在结构元素中
    - ✓ 膨胀运算：$A \subseteq A \oplus B$
    - ✓ 腐蚀运算：$A \ominus B \subseteq A$
  - 原点不包含在结构元素中
    - ✓ 膨胀运算：$A \not\subset A \oplus B$
    - ✓ 腐蚀运算：$A \ominus B \subseteq A$，或 $A \ominus B \not\subset A$

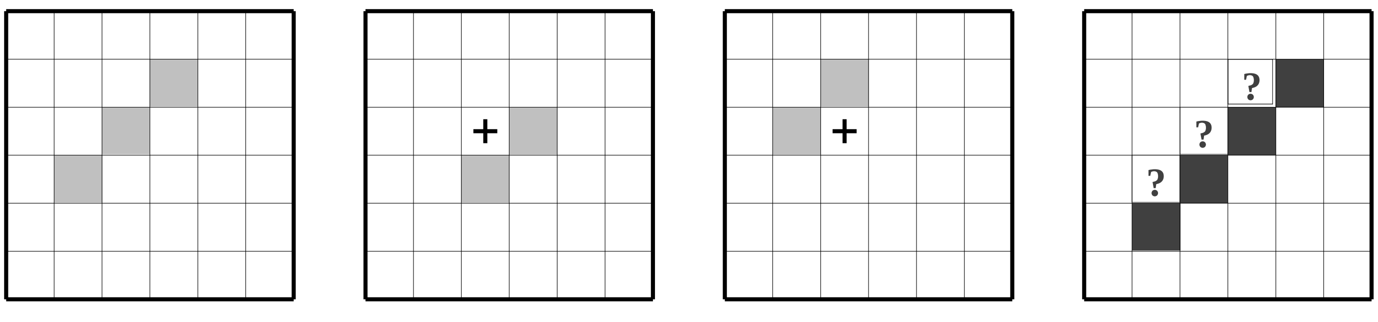
膨胀和腐蚀

□ 原点不包含在结构元素中时的膨胀运算

$$A \not\subset A \oplus B \qquad A \oplus B = \{x | [(\hat{B})_x \cap A] \neq \emptyset\}$$



A在膨胀中自身完全消失了

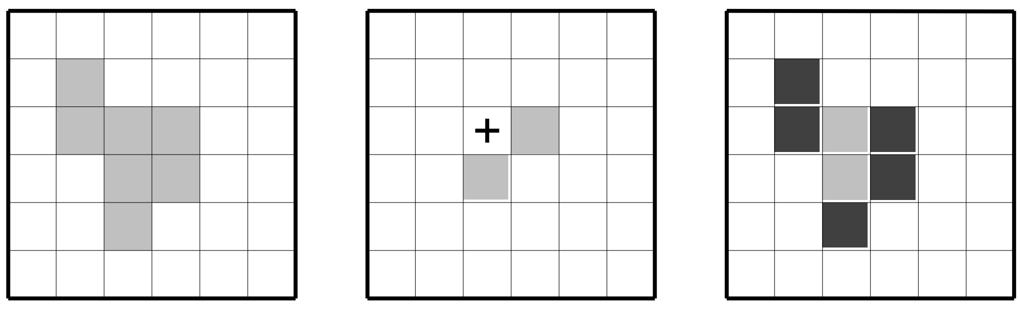


膨胀和腐蚀

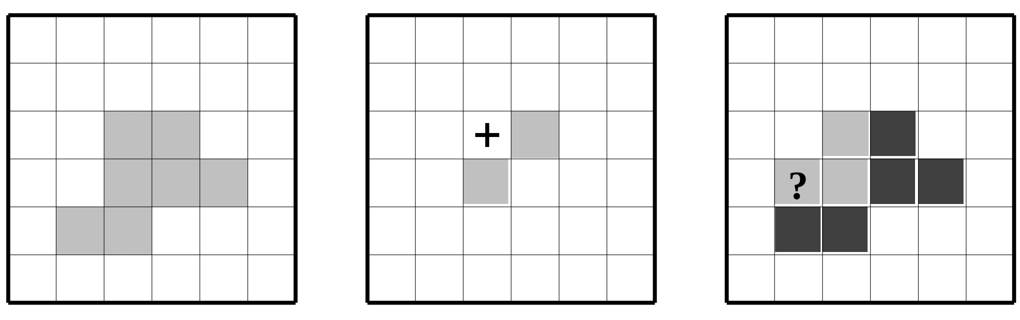
□ 原点不包含在结构元素中时的腐蚀运算

$A \ominus B \subseteq A$

$$A \ominus B = \{x | (B)_x \subseteq A\}$$



$A \ominus B \not\subset A$



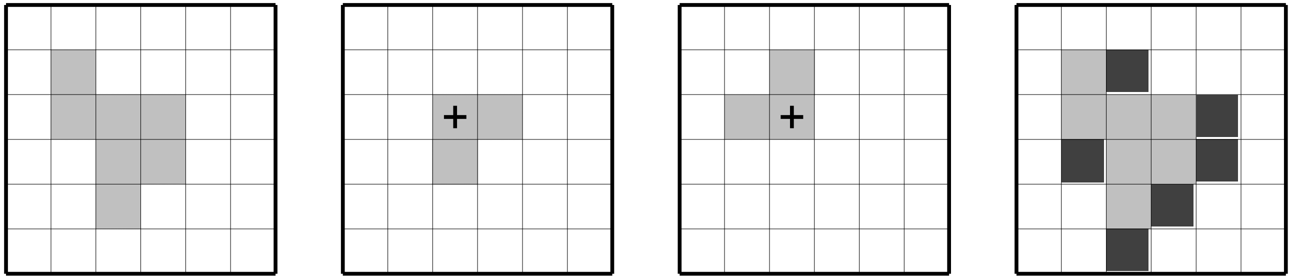
膨胀和腐蚀

□ 用向量运算实现膨胀和腐蚀

$$A \oplus B = \{x | x = a + b, 对于任意 a \in \mathrm{A} 和 b \in B\}$$

$A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (2, 3), (3, 3), (2, 4)\}$

$B = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$



$A \oplus B = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2),$
$(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (2, 4), (3, 4), (2, 5)\}$

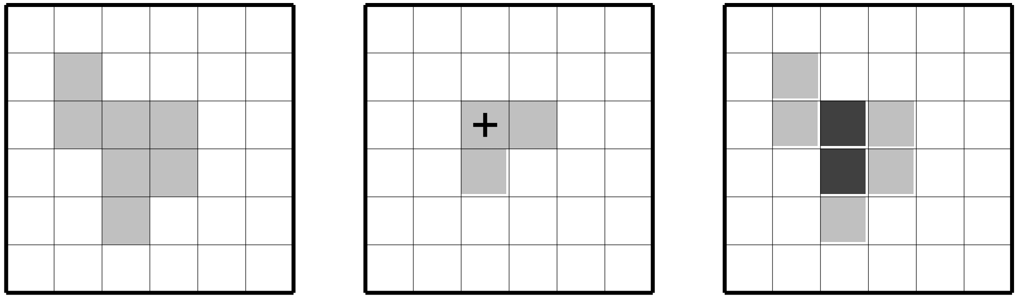
膨胀和腐蚀

- 用向量运算实现膨胀和腐蚀

$$A \ominus B = \{x | (x + b) \in A \text{对每一个} b \in B\}$$

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (2, 3), (3, 3), (2, 4)\}$$

$$B = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$$



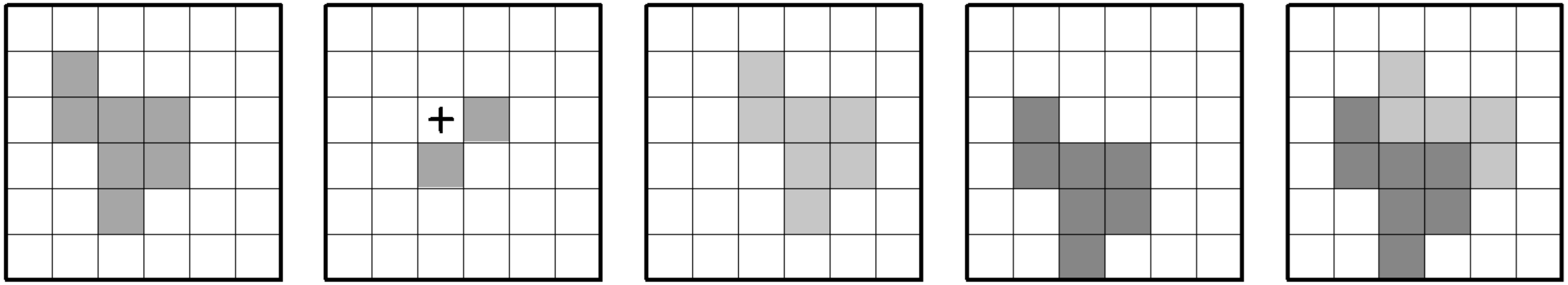
$$A \ominus B = \{(2, 2), (2, 3)\}$$

膨胀和腐蚀

- 用位移运算实现膨胀和腐蚀

按每个b来位移A并把结果或（OR）起来

$$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} (A)_b$$



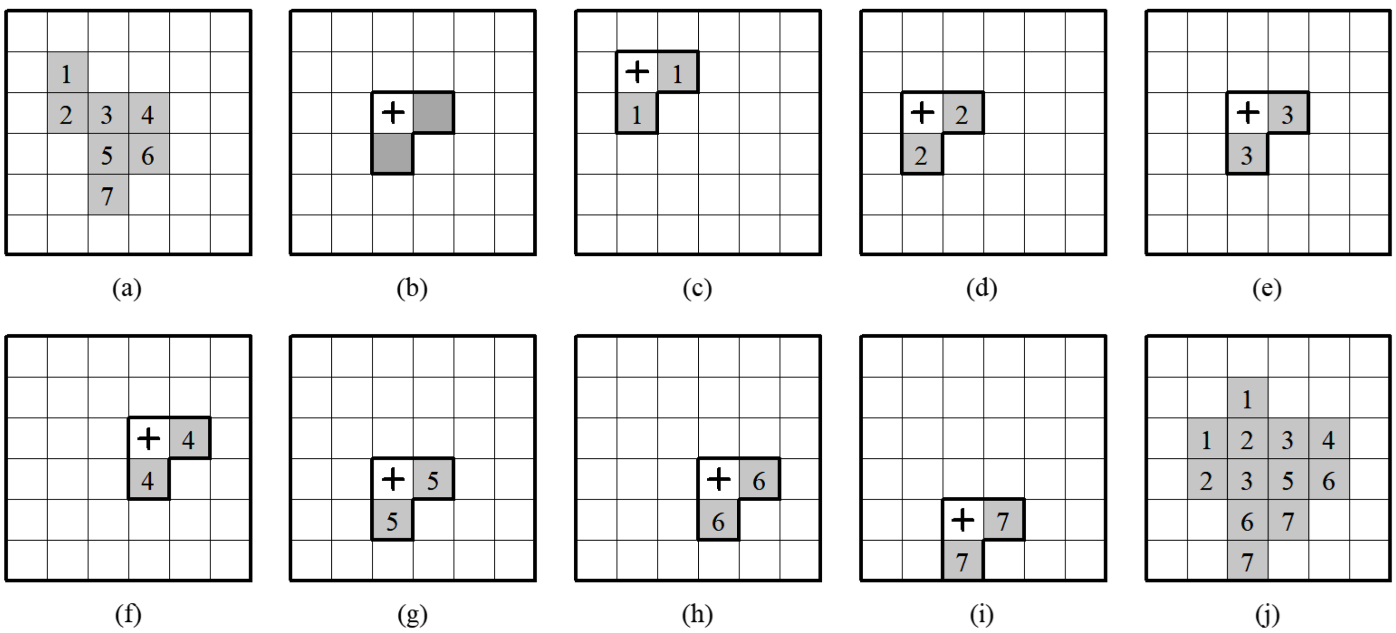
(a) (b) (c) (d) (e)

膨胀和腐蚀

□ 用位移运算实现膨胀和腐蚀

按每个a来位移B并把结果或（OR）起来

$$A \oplus B = \bigcup_{a \in A} (B)_a$$

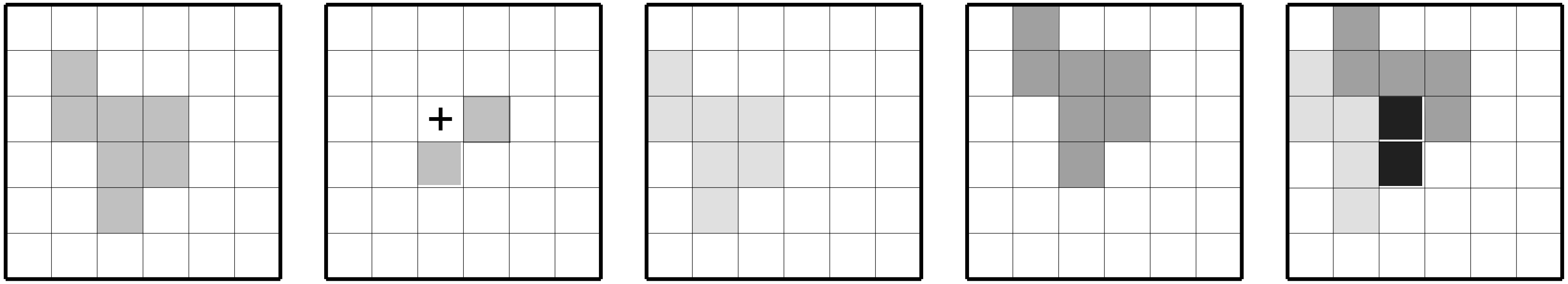


膨胀和腐蚀

□ 用位移运算实现膨胀和腐蚀

按每个b来负位移A并把结果交（AND）起来

$$A \ominus B = \bigcap_{b \in B} (A)_{-b}$$

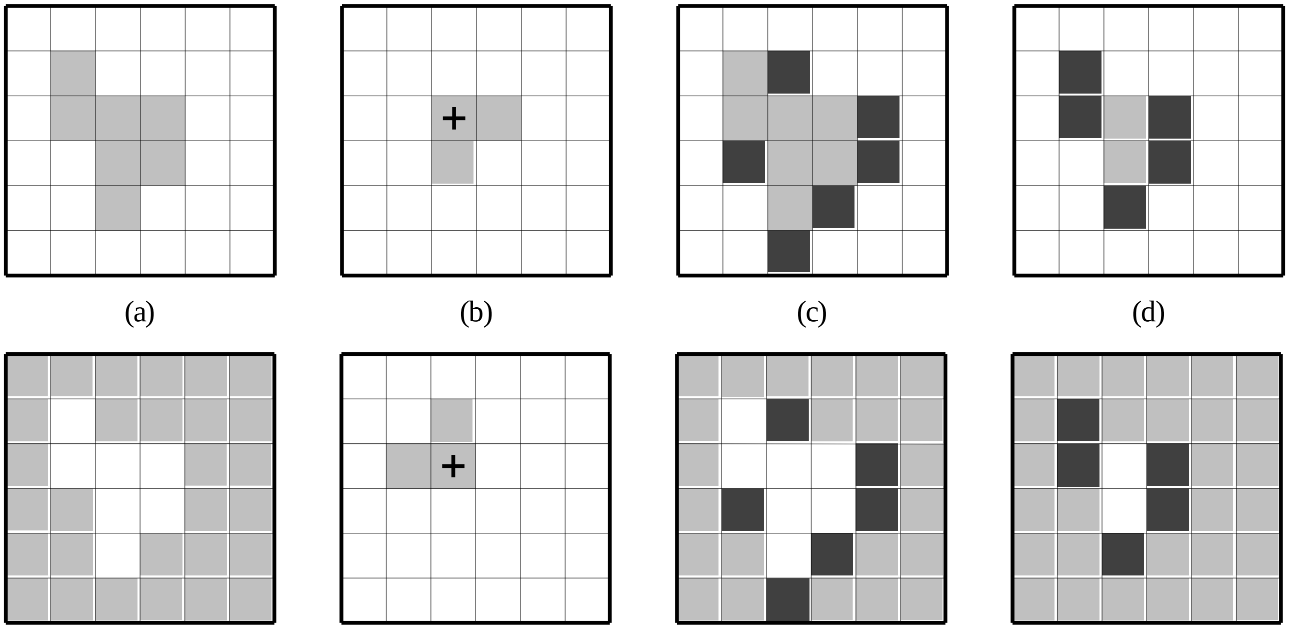


(a) (b) (c) (d) (e)

膨胀和腐蚀

□ 膨胀和腐蚀的对偶性

$$(A \oplus B)^c = A^c \ominus \hat{B} \qquad (A \ominus B)^c = A^c \oplus \hat{B}$$



(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h)

膨胀和腐蚀

- 膨胀和腐蚀的对偶性

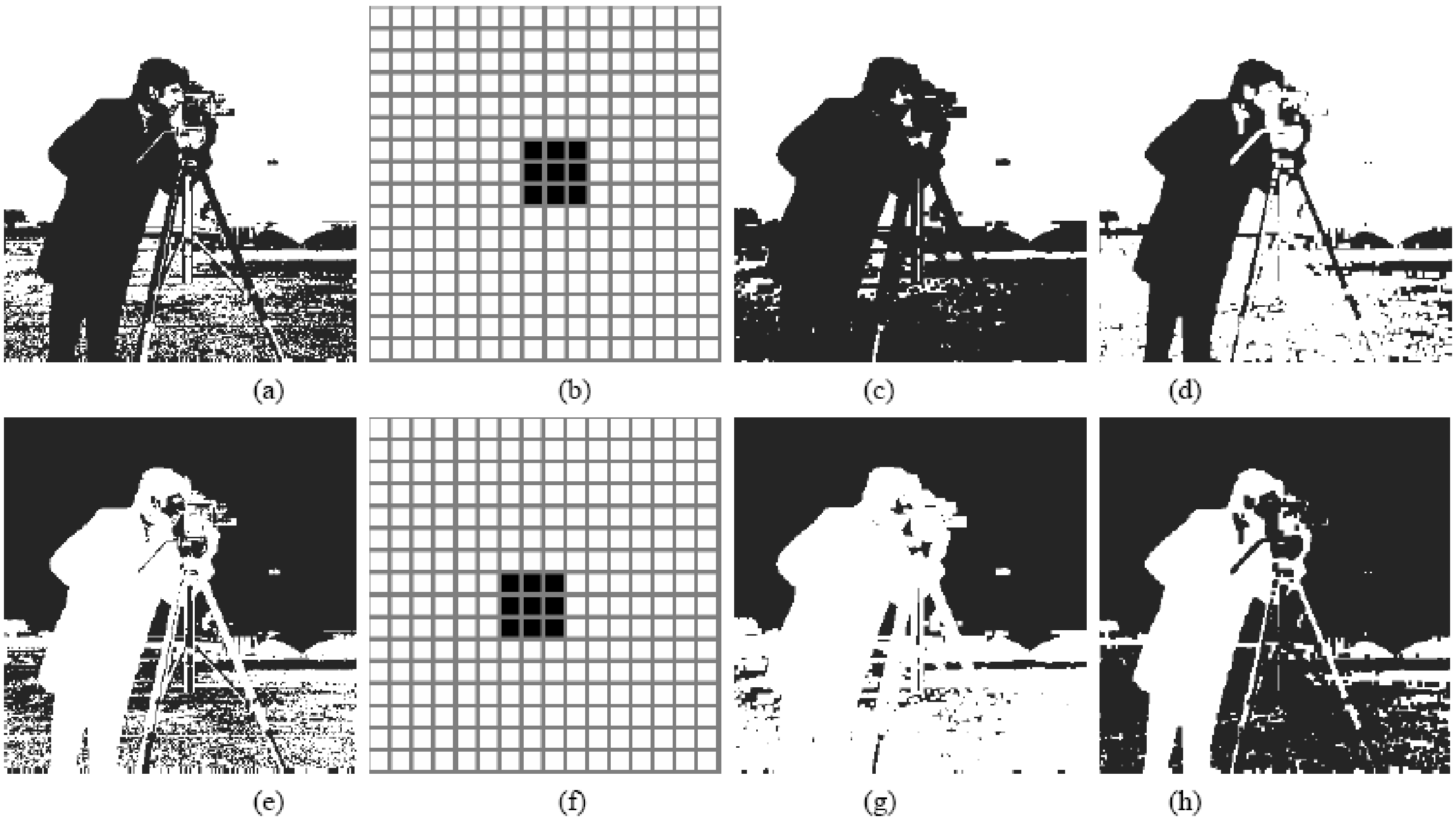


图 14.2.12　膨胀和腐蚀的对偶性验证实例

开启和闭合

开启和闭合定义

- 膨胀和腐蚀并不互为逆运算
- 它们可以级连结合使用
- 开启：先对图象进行腐蚀然后膨胀其结果

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$

- 闭合：先对图象进行膨胀然后腐蚀其结果

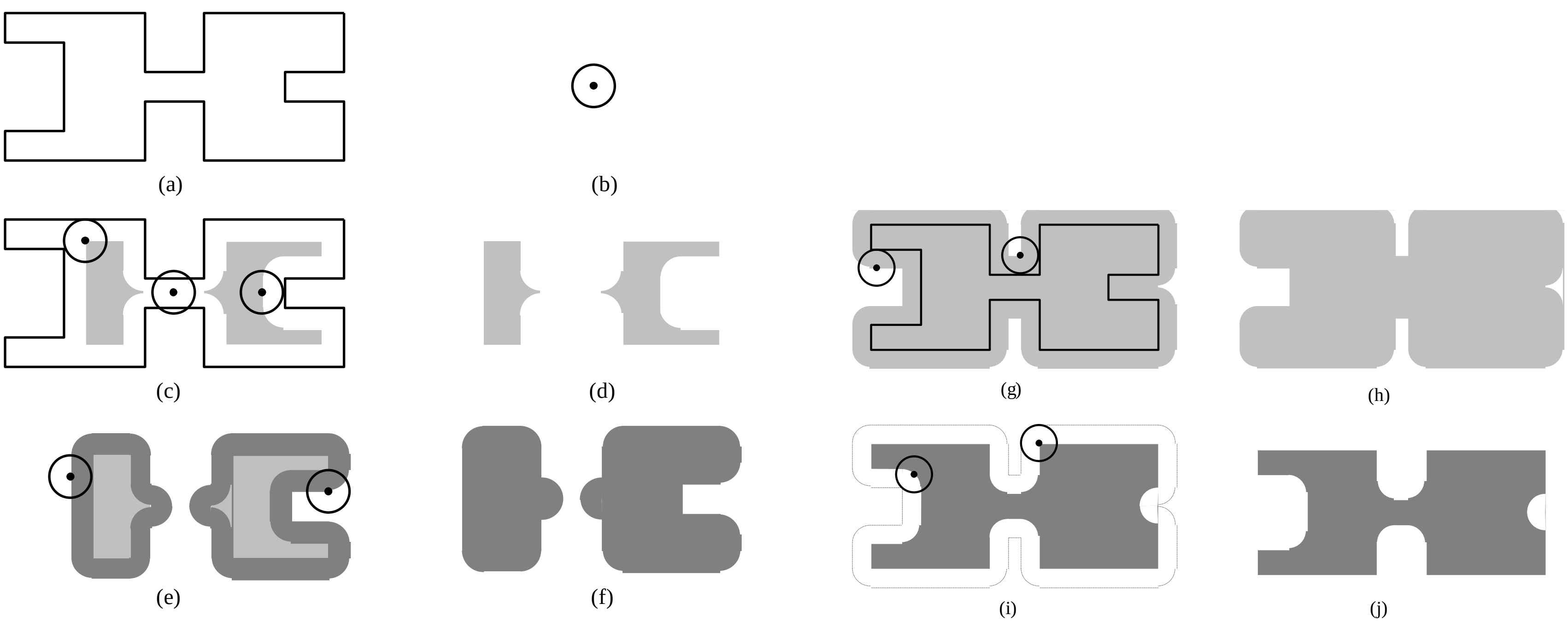
$$A \cdot B = (A \oplus B) \ominus B$$

- 开启和闭合不受原点是否在结构元素之中的影响

开启和闭合

□ 开启和闭合定义

- 开启运算可以把比结构元素小的突刺滤掉
- 闭合运算可以把比结构元素小的缺口或孔填充上



开启　　　　闭合

开启和闭合

- ☐ 开启和闭合定义

原图

(a) (b)

图 14.2.14 开启和闭合实例

开启和闭合

- 开启和闭合的对偶性
  - 开启和闭合也具有对偶性

$$(A \circ B)^c = A^c \cdot \hat{B}$$

$$(A \cdot B)^c = A^c \circ \hat{B}$$

$$(A \circ B)^c = [(A \ominus B) \oplus B]^c = (A \ominus B)^c \ominus \hat{B} = A^c \oplus \hat{B} \ominus \hat{B} = A^c \cdot \hat{B}$$

$$(A \cdot B)^c = [(A \oplus B) \ominus B]^c = (A \oplus B)^c \oplus \hat{B} = A^c \ominus \hat{B} \oplus \hat{B} = A^c \circ \hat{B}$$

击中-击不中变换

- 击中-击不中变换
  - 形状检测的一种基本工具
  - 对应两个操作，所以用到两个结构元素
  - 设A为原始图象，E和F为一对不重合的集合

$$A \Uparrow (E,F) = (A \ominus E) \cap (A^c \ominus F) = (A \ominus E) \cap (A \oplus F)^c$$

E：击中结构元素

F：击不中结构元素

击中-击不中变换

□ 击中-击不中变换

$$A \Uparrow (E,F) = (A \ominus E)\cap(A^c \ominus F) = (A \ominus E)\cap(A\oplus F)^c$$

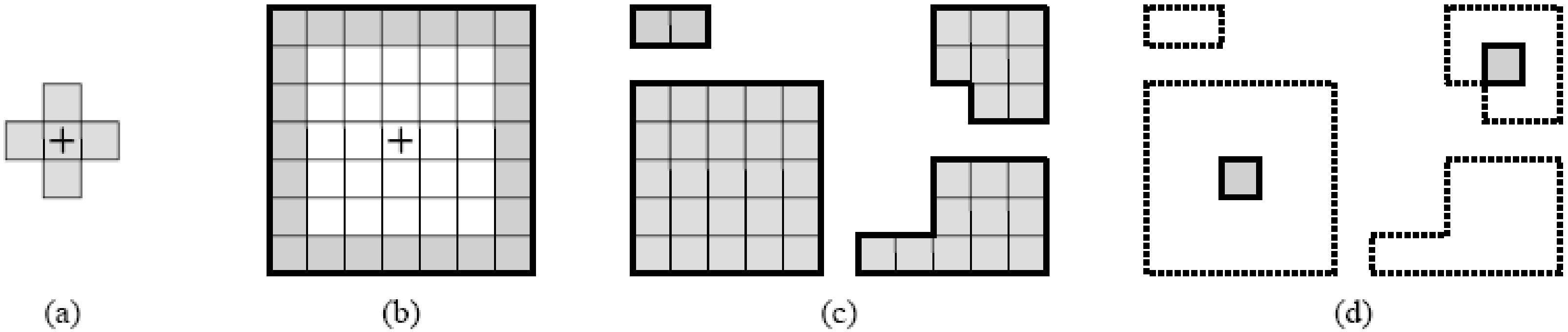


图 14.3.1 击中-击不中变换示例

(a): 击中结构元素　(b): 击不中结构元素

(c): 原始图像　(d): 变换结果

击中-击不中变换

- 击中-击不中变换 ((e)和(f)来自于别的变换)

击中变换：[1 1 1]

击不中变换：$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

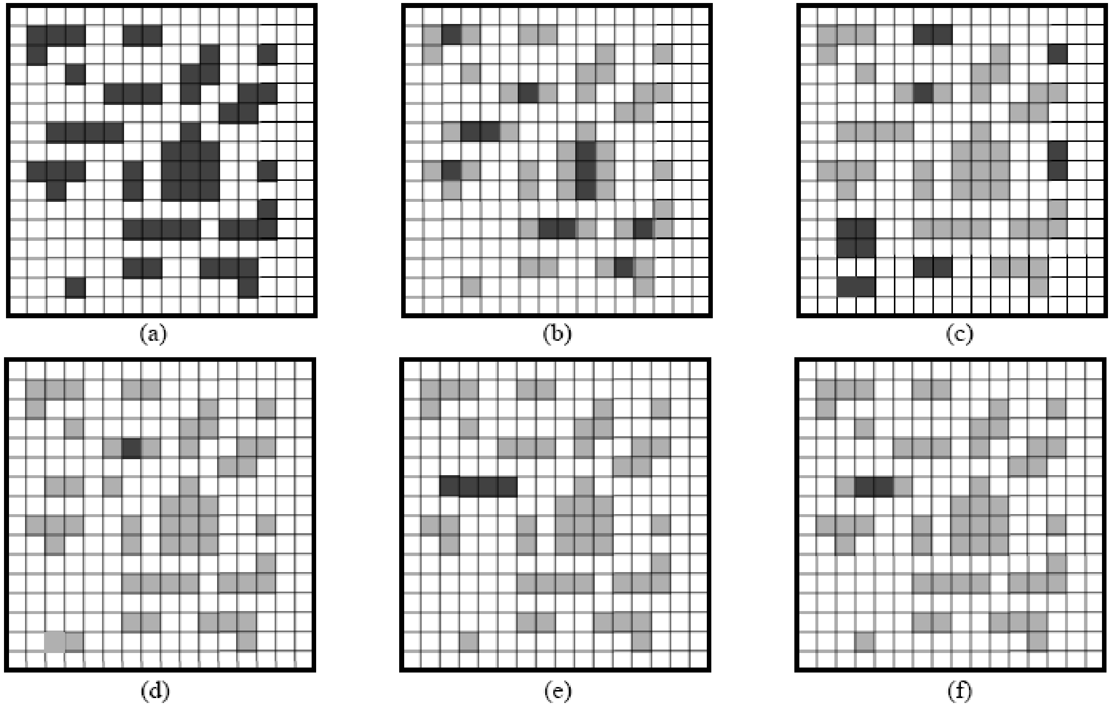


图 14.3.2 利用击中-击不中算子以提取包含水平方向上有连续 3 个像素的线段

击中-击不中变换

- 击中-击不中算子中的击中模板与击不中模板不重合，可以被结合成一个结构元素，1对应击中模板，0对应击不中模板，X表示不关心的像素
- 击中-击不中变换中的结构元素
  - $A \Uparrow B$的结果中仍保留的目标象素对应在A中其邻域与结构元素B对应的象素

$$A \Uparrow B = (A \Theta B_o) \cap (A^c \Theta B_b)$$

(a) (b) (c) (d)

二值形态学实用算法

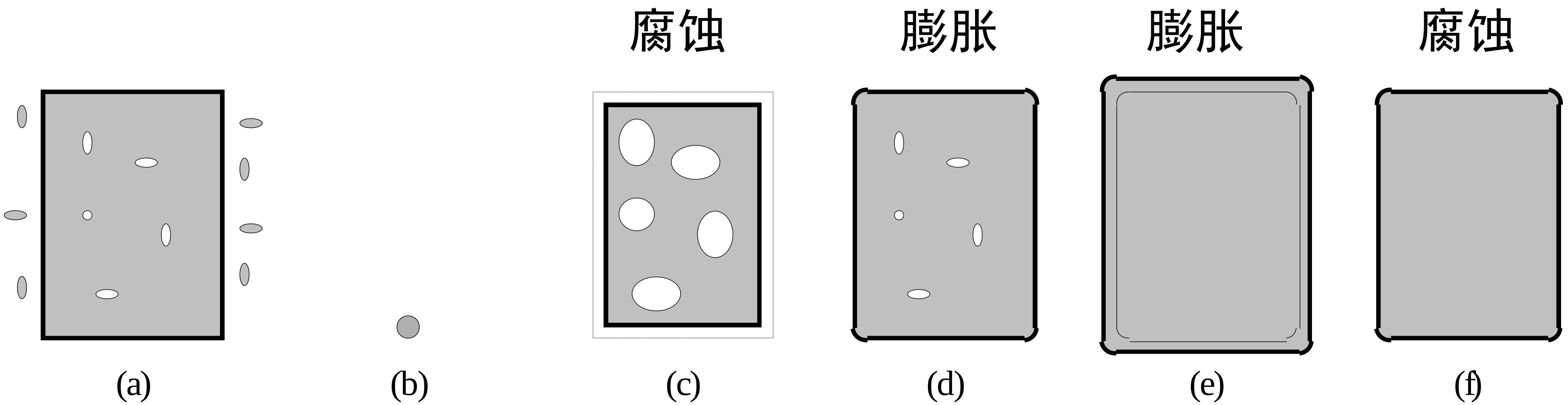
- 噪声滤除
- 目标检测
- 边界提取
- 区域填充
- 连通组元提取
- 区域骨架提取

二值形态学实用算法-I

□ 噪声滤除

- 先开启后闭合

$$\{[(A\ominus B)\oplus B]\oplus B\}\ominus B=(A\circ B)\cdot B$$

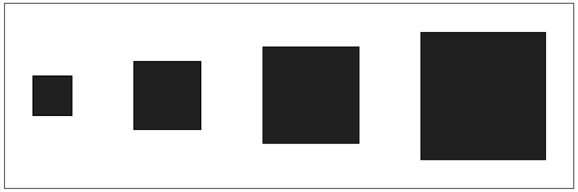


二值形态学实用算法-II

- 目标检测 （击中击不中变换）
  - 3 × 3，5 × 5，7 × 7和9 × 9的实心正方形

3 × 3 实心正方形

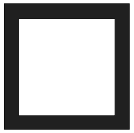
9 × 9 方框



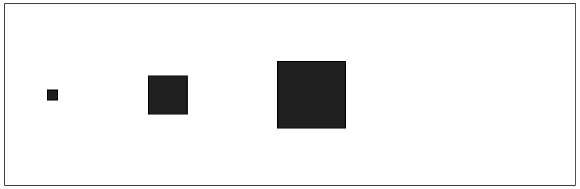
(a)

（b）： E
（c）： F

(b)



(c)



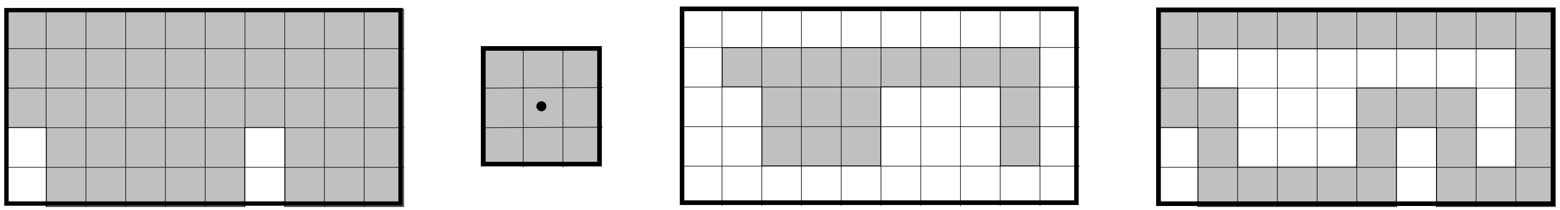
(d)

二值形态学实用算法-III

□ 边界提取

- 先用1个结构元素B腐蚀 A，再求取腐蚀结果和A的差集就可得到边界 β(A)

$$\beta(A) = A - (A \ominus B)$$



(a) (b) (c) (d)

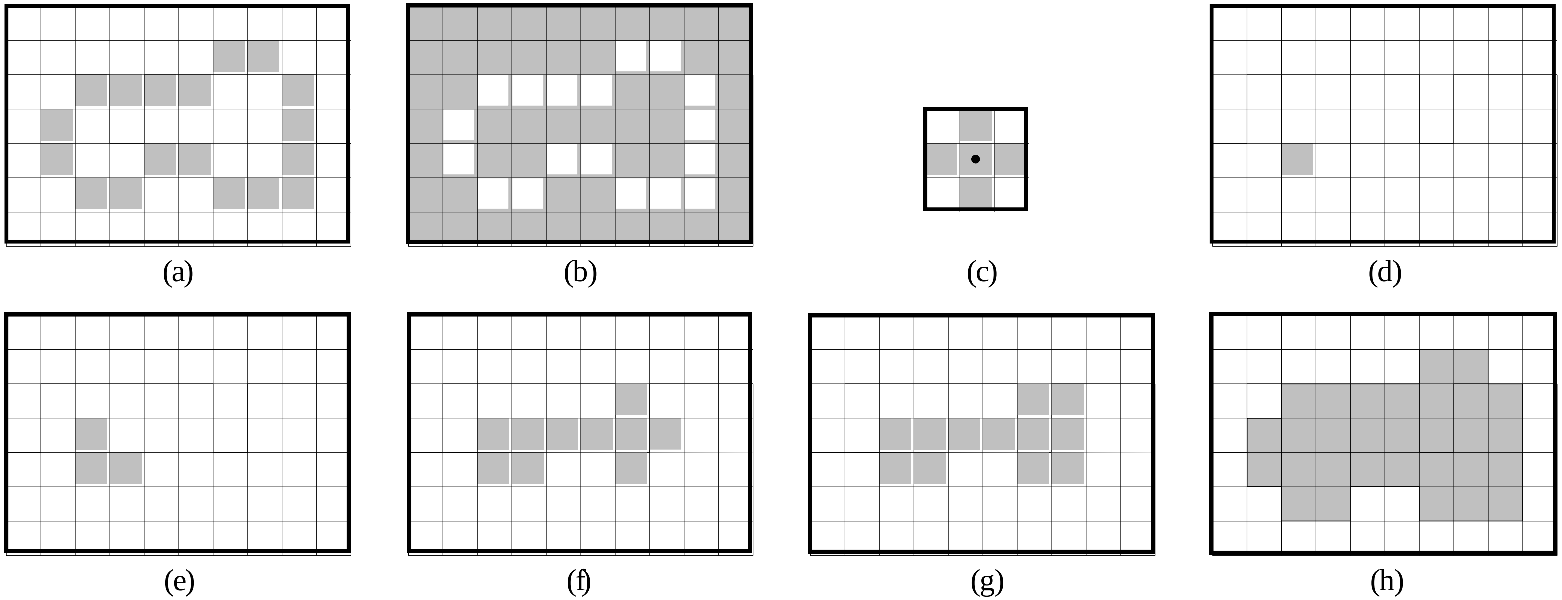
结构元素是8−连通的，而所得到的边界是4−连通的

二值形态学实用算法-IV

□ 区域填充

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

取内部一个点，按照模板膨胀，取交集，迭代多次；最后与（a）取并集



结构元素是4−连通的，而原填充的边界是8−连通的