第四章：图像表达-边缘检测

授课老师：李厚强，胡洋，**周文罡**，李礼

图像表达内容提纲

- 图像表达：特征检测与匹配
  - 边缘检测，关键点检测，特征描述，视觉预训练模型

如何构建图像之间的关联关系？

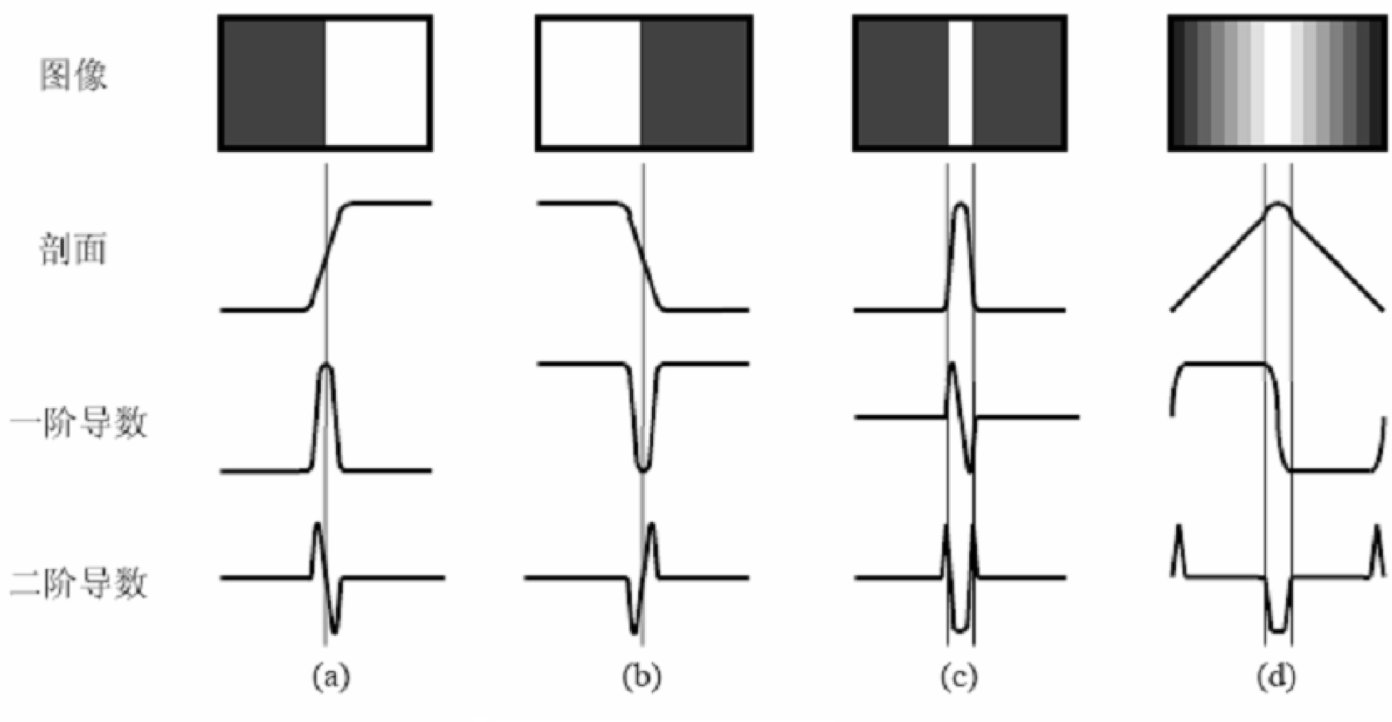



边缘检测

- 边缘是图象中对象的基本的特征之一，可以通过检测物体边缘来提取所需物体
  - **边缘模型**
  - 边缘检测算子
  - 边缘拟合
  - 边缘搜索
  - 多尺度边缘检测

边缘模型

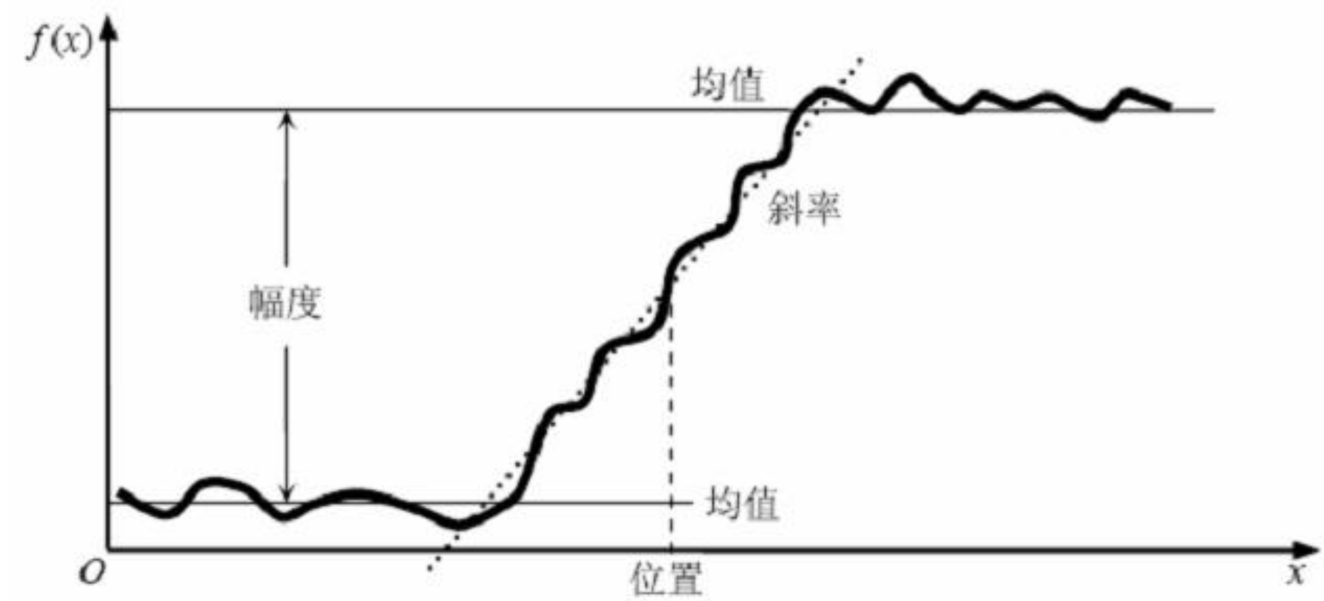
- 边缘（Edge）
  - 一般出现在不同灰度、颜色、纹理区域的交界处



图象（灰度）边缘模型及其一阶、二阶导数

边缘模型

- 描述边缘的参数
  - 位置：边缘（等效的）最大灰度不连续处
  - 朝向：跨越灰度最大不连续的方向
  - 幅度：灰度不连续方向上的灰度差
  - 均值：属于边缘的像素的灰度均值
  - 斜率：边缘在其朝向上的倾斜程度



边缘检测

- 边缘是图象中对象的基本的特征之一，可以通过检测物体边缘来提取所需物体
  - 边缘模型
  - **边缘检测算子**
  - 边缘拟合
  - 边缘搜索
  - 多尺度边缘检测

边缘检测

- 边缘检测算子
  - 正交梯度算子
    - ✓ 梯度算子
  - 方向微分算子
    - ✓ Kirsch算子
  - 二阶导数算子
    - ✓ 拉普拉斯（Laplacian）算子
    - ✓ 马尔（Marr）算子
  - 最优边缘检测算子
    - ✓ 坎尼（Canny）算子
  - SUSAN 算子

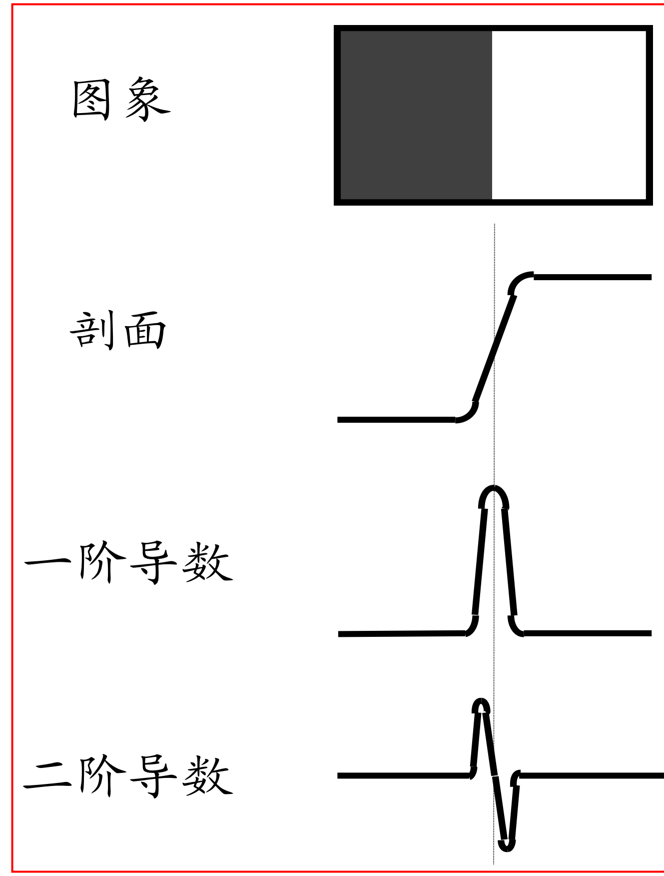
边缘检测 I：正交梯度算子

□ 梯度算子：一阶差分算子

梯度矢量：$\nabla f(x,y) = [\,G_x \quad G_y\,]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

梯度幅值：$\mathrm{mag}(\nabla f) = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}$

梯度方向角：$\varphi(x,y) = \arctan\left(\frac{G_y}{G_x}\right)$



中心差分：$\dfrac{\partial f}{\partial x} \approx 0.5 \cdot [f(x+1,y) - f(x-1,y)]$

前向差分：$\dfrac{\partial f}{\partial x} \approx f(x+1,y) - f(x,y)$

后向差分：$\dfrac{\partial f}{\partial x} \approx f(x,y) - f(x-1,y)$

边缘检测 I：正交梯度算子

□ 梯度算子：一阶差分算子

- 由于差分运算会放大噪声影响，一般事先对图像做高斯平滑预处理
  - ✓ 等价于**高斯函数梯度**与图像做卷积

$$\mathbf{J}_\sigma(\mathbf{x}) = \nabla[G_\sigma(\mathbf{x}) * I(\mathbf{x})] = [\nabla G_\sigma](\mathbf{x}) * I(\mathbf{x})$$

  - ✓ 高斯函数梯度

$$\nabla G_\sigma(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial G_\sigma}{\partial x}, \frac{\partial G_\sigma}{\partial y}\right)(\mathbf{x}) = [-x \quad -y]\frac{1}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$$

边缘检测 I：正交梯度算子

- 梯度算子：利用模板（与图象进行）卷积
  - 模板比较
    - ✓ ① 边缘粗细
    - ✓ ② 方向性
    - ✓ ③ 平滑操作：Prewitt 和 Sobel

1	
	−1

	1
−1	

(a) Roberts

−1		1
−1		1
−1		1

1	1	1
−1	−1	−1

(b) Prewitt

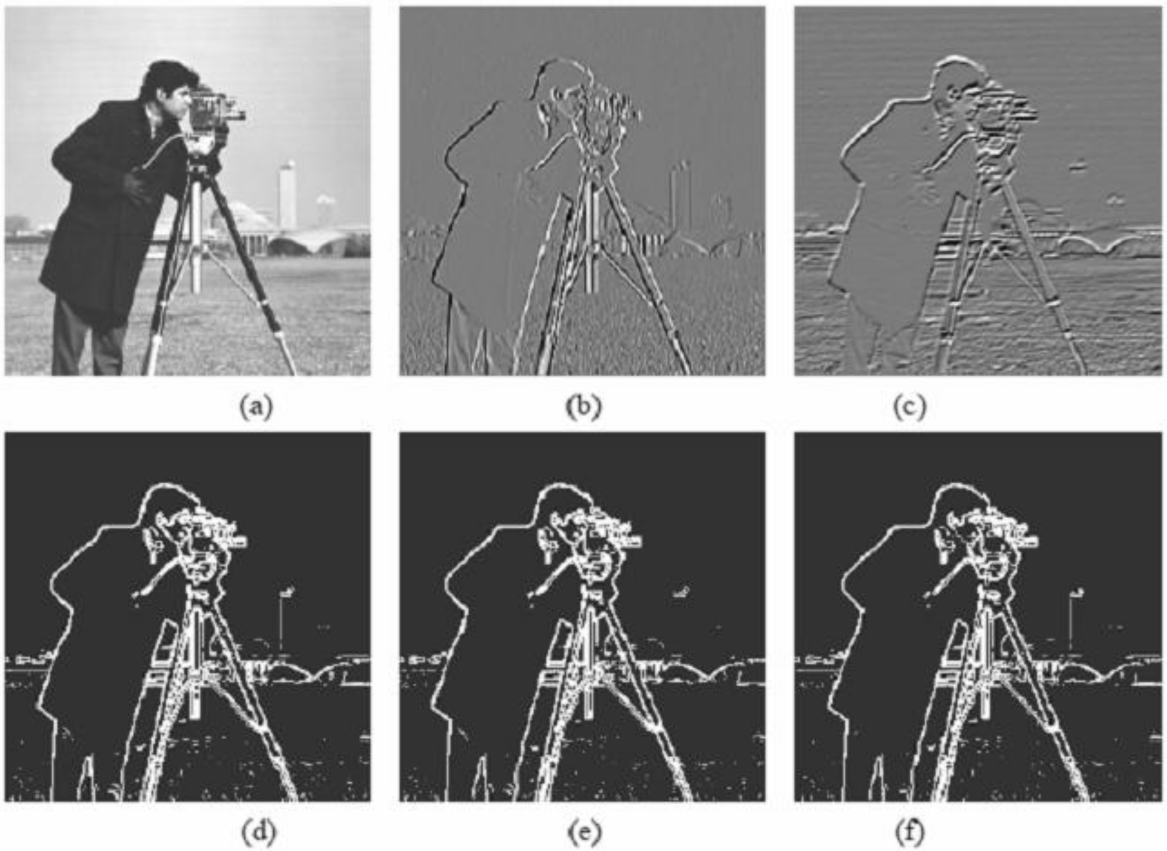
−1		1
−2		2
−1		1

1	2	1
−1	−2	−1

(c) Sobel

边缘检测 I：正交梯度算子

□ 梯度图示例



a)原图；　b) Sobel 水平模板；　c) Sobel 垂直模板；

d) Sobel梯度图（范数2）　e) Sobel梯度图（范数1）　f) Sobel梯度图（范数∞）

边缘检测 II：方向微分算子

- 基于特定方向上的微分来检测边缘

八方向Kirsch（7 × 7）模板

−5	3	3
−5		3
−5	3	3

3	3	3
−5	0	3
−5	−5	3

3	3	3
3	0	3
−5	−5	−5

3	3	3
3	0	−5
3	−5	−5

3	3	−5
3		−5
3	3	−5

3	−5	−5
3	0	−5
3	3	3

−5	−5	−5
3	0	3
3	3	3

−5	−5	3
−5	0	3
3	3	3

边缘检测 II：方向微分算子

□ 用不同模板对图像进行卷积

1.0	1.0	1.0
-1.0	-1.0	-1.0

(a)

1.0	1.0	0.7
0.8		-0.8
-0.7	-1.0	-1.0

(b)

1.0	0.8	-0.7
1.0		-1.0
0.7	-0.8	-1.0

(c)

-1.0		1.0
-1.0		1.0
-1.0		1.0

(d)

-0.7	0.8	1.0
-1.0		1.0
-1.0	-0.8	0.7

(e)

0.7	1.0	1.0
-0.8		0.8
-1.0	-1.0	-0.7

(f)

- 边缘幅度：卷积值的最大值的绝对值
- 边缘方向：卷积值的最大值的符号
- 模板的对称性 → 模板数减半

- 可将各系数值线性变换到整数值，其中绝对值最小的系数变换为单位值

边缘检测 II：方向微分算子

- 有噪声时：边缘象素常孤立/分小段连续
- 封闭边界（轮廓）：连接边缘象素
- 一种具体方法
  - 利用象素梯度的幅度和方向：
    - ✓ 象素(s, t)在象素(x, y)的邻域

$$\boxed{\left|\nabla f(x,y)-\nabla f(s,t)\right| \leqslant T}$$

$$\boxed{\left|\varphi(x,y)-\varphi(s,t)\right| \leqslant A}$$

边缘检测 III：二阶导数算子

- 1. 拉普拉斯算子：

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- 基于上面定义，离散化近似
  - $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx f_x(x+0.5,y) - f_x(x-0.5,y) = f(x+1,y) - 2f(x,y) + f(x-1,y)$
  - $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx f_y(x,y+0.5) - f_y(x,y-0.5) = f(x,y+1) - 2f(x,y) + f(x,y-1)$

- 几种常用的拉普拉斯算子模板：

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

1	1	1
1	-8	1
1	1	1

边缘检测 III：二阶导数算子

- 1. 拉普拉斯算子
  - 由于涉及二阶微分，对图象中的噪声相当敏感
  - 产生双象素宽的边缘
  - 滤波结果为标量，不能提供边缘方向的信息

边缘检测 III：二阶导数算子

□ 2. 马尔算子

- 在对函数算二阶微分前，先对图像进行高斯卷积（低通滤波）

$$\mathbf{J}_\sigma(\mathbf{x}) = \nabla[G_\sigma(\mathbf{x}) * I(\mathbf{x})] = [\nabla G_\sigma](\mathbf{x}) * I(\mathbf{x})$$

$$S_\sigma(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \mathbf{J}_\sigma(\mathbf{x}) = [\nabla^2 G_\sigma](\mathbf{x}) * I(\mathbf{x})$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 G_\sigma(\mathbf{x}) &= \left(\frac{x^2+y^2}{\sigma^4} - \frac{2}{\sigma^2}\right) G_\sigma(\mathbf{x}) \\ &= \left(\frac{x^2}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2}\right) G_\sigma(x) G_\sigma(y) + \left(\frac{y^2}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2}\right) G_\sigma(y) G_\sigma(x)\end{aligned}$$

- 上述操作等价于：高斯函数的二阶导数与图像做卷积运算
  - ✓ 具体计算过程：
    - ➢ (1) 用一个2-D的高斯平滑模板与源图象卷积
    - ➢ (2) 计算卷积后图象的拉普拉斯值
    - ➢ (3) 检测拉普拉斯图象中的过零点作为边缘点

边缘检测 III：二阶导数算子

2. 马尔算子

- 等价于：高斯函数的二阶导数与图像做卷积运算

- 马尔算子的一维函数及其频谱图：

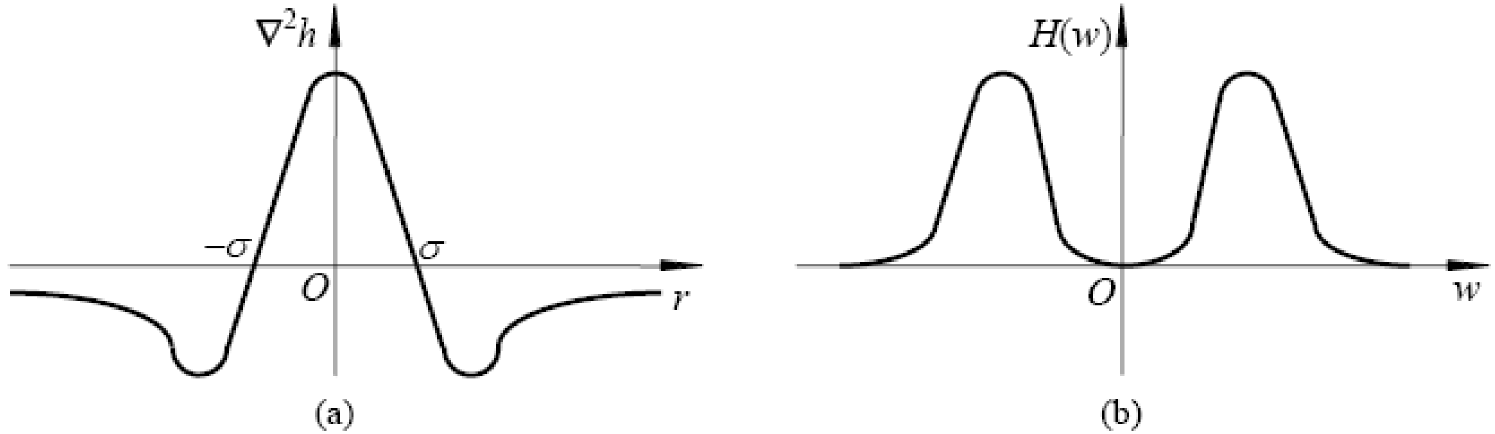


图 4.2.11　$\nabla^2 h$ 的剖面和对应的转移函数

边缘检测 IV：最优边缘检测算子

- 好的边缘检测算子应具有的三个指标
  - 低失误概率：既要少将真正的边缘丢失也要少将非边缘判为边缘

$$SNR = \frac{\left| \int_{-w}^{+w} G(-x) f(x)\, dx \right|}{n_0 \left[\int_{-w}^{+w} f^2(x)\, dx \right]^{1/2}}$$

  - 高位置精度：检测出的边缘应在真正的边界上

$$Localization = \frac{\left| \int_{-w}^{+w} G'(-x) f'(x)\, dx \right|}{n_0 \sqrt{\int_{-w}^{+w} f'^2(x)\, dx}}$$

  - 对每个边缘有唯一的响应：得到的边界为单象素宽

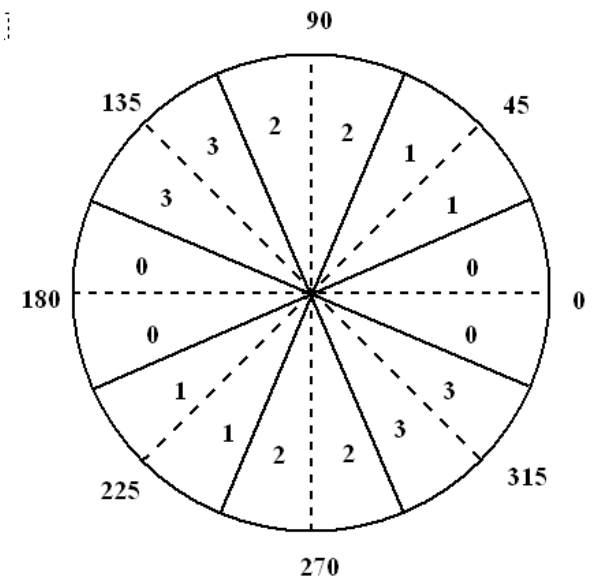
$$X_{zc}(f) = \pi \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f'^2(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f''^2(x) dx} \right)^{1/2}$$

边缘检测 IV：最优边缘检测算子

- Canny算子
  - 可以用高斯函数的一阶微分算子来近似
  - 算法基本步骤
    - ✓ 高斯滤波平滑
      - ➢ 对图像预处理，抑制噪声在计算梯度时的影响
    - ✓ 计算梯度幅度与方向
      - ➢ 计算一阶微分
    - ✓ 非极大值抑制
      - ➢ 实现边缘的高位置精度，得到的边界为单象素宽
    - ✓ 双阈值检测和连接
      - ➢ 避免真正的边缘丢失
      - ➢ 避免将非边缘判为边缘

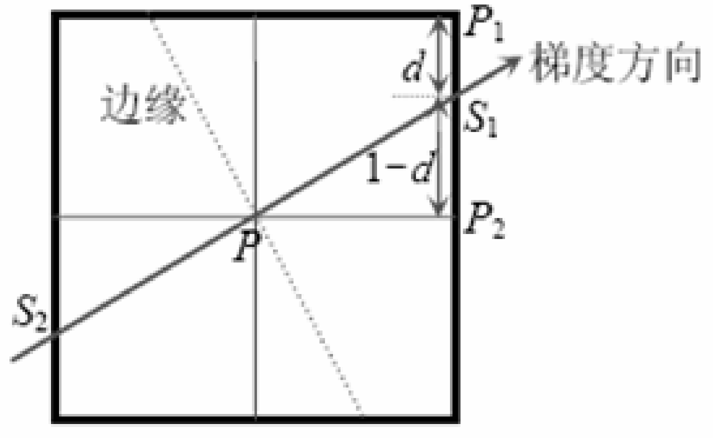
Canny算子：非极大值抑制

- 非极大值抑制（non-maxima suppression, NMS)
  - 细化幅值图像M[i,j]中的屋脊带(ridge)，只保留幅值局部变化最大的点
  - NMS通过抑制梯度线上所有非屋脊峰值的幅值来细化边缘。
  - 将梯度角θ[i,j]的变化范围分为四个扇区ζ[i,j]=Sector(θ[i,j]);
  - 用3x3邻域作用于幅值图像M[i,j]，邻域中心像素M[i,j]与沿着梯度线方向的两个像素进行比较：若M[i,j]不比沿梯度线方向的两个相邻点幅值大，则M[i,j]置零。



Canny算子：非极大值抑制

- 改进方法：用插值进行非最大消除
  - 用插值进行最大值消除：精确但计算量大
  - 思路：通过对相邻单元的梯度幅值的插值估计梯度线上的相邻幅值



2-D 梯度插值

Canny算子：双阈值算法

- 双阈值算法采用两个阈值 τ_1和τ_2，且$\tau_2 \approx 2\tau_1$
- 得到两个阈值边缘图像 $T_1[i,j]$ 和 $T_2[i,j]$
  - 边缘图像 T_1 中的边缘点响应值$\geq \tau_1$
  - 边缘图像 T_2 中的边缘点响应值$\geq \tau_2$
- $T_2[i,j]$含有的假边缘少，但有间断点
- 以 $T_2[i,j]$ 为指导，在 $T_1[i,j]$ 中相应8邻域点寻找可以连接到轮廓上的点
- 不断在 $T_1[i,j]$ 收集边缘，直到将 $T_2[i,j]$ 中所有的间隙连接起来为止

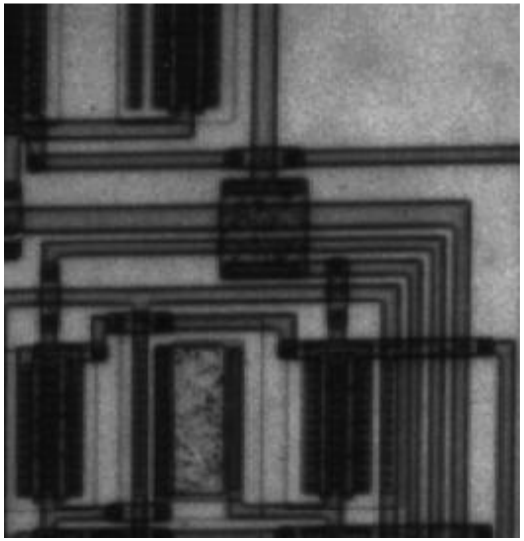
Canny算子：双阈值算法

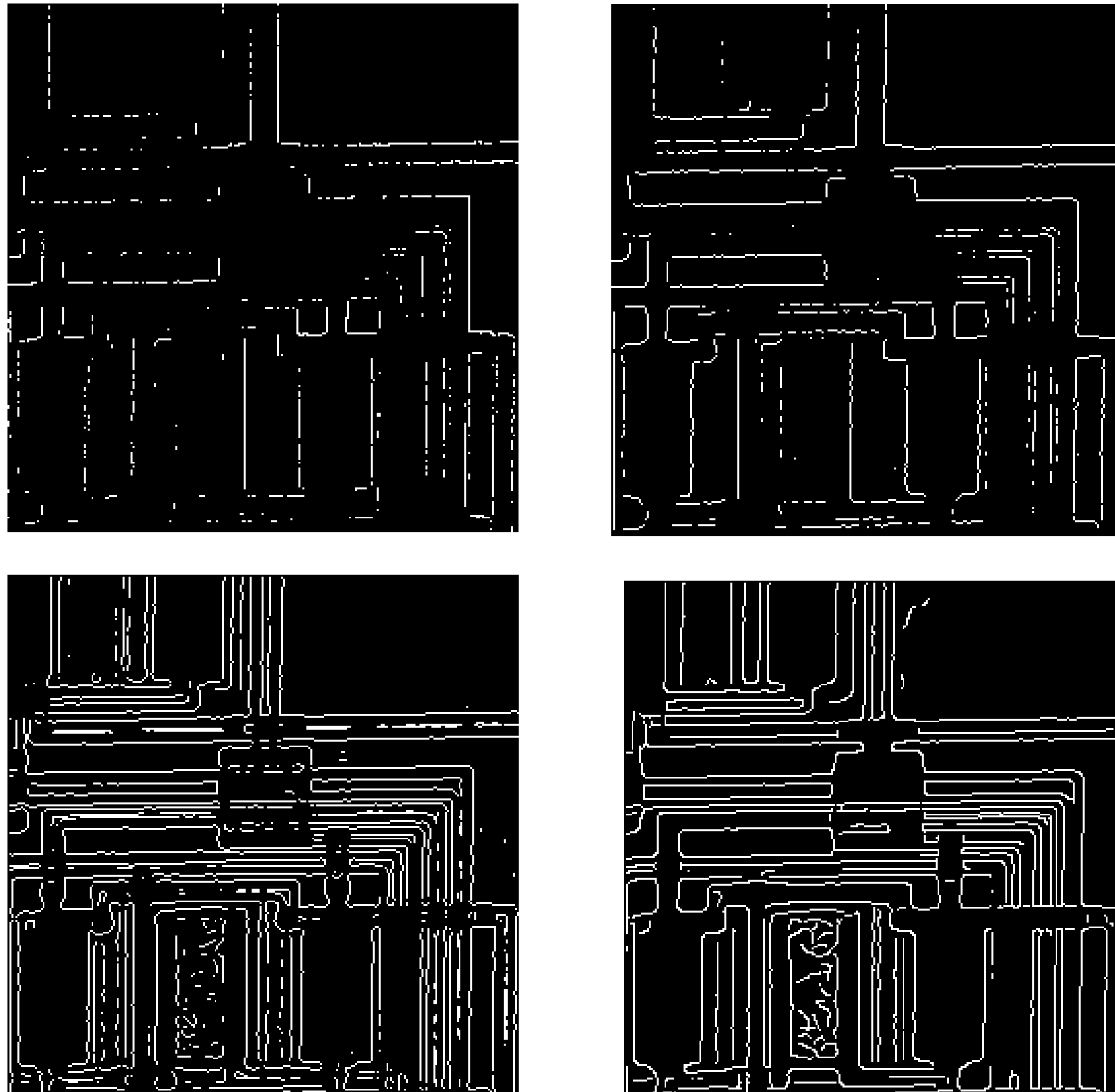
9				8			5
	5				6		4
		9			5		
6			4			7	
	7		6	2		9	
4		6			4		7
		5		2	6		
6	4				7		

$\tau_1=4$

$\tau_2=7$

边缘检测实例对比

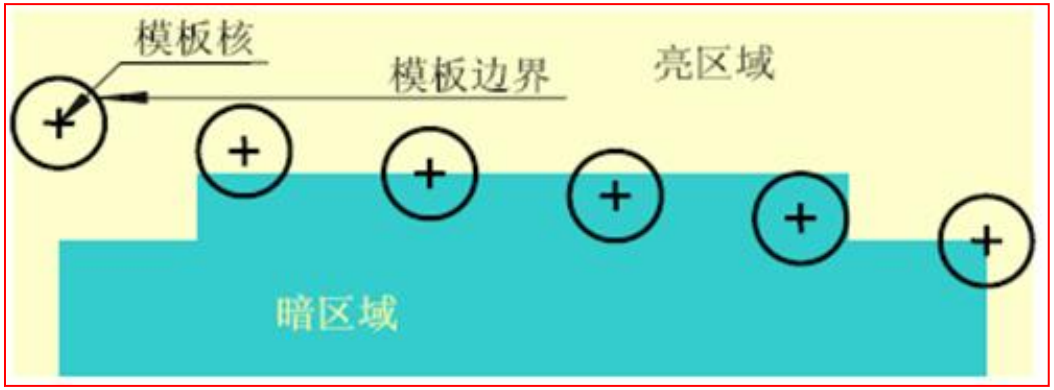




Roberts	Sobel
Log	Canny

边缘检测 V：SUSAN算子

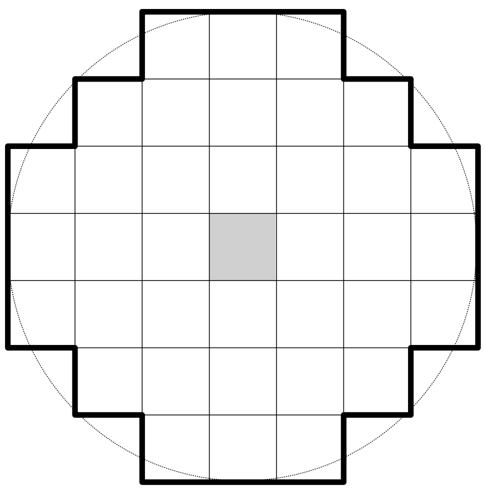
- USAN: Univalue Segment Assimilating Nucleus
  - 核同值区：相对于模板的核，模板中有一定的区域与它有相同灰度
  - USAN面积携带了关于图象中核象素处结构的主要信息
    - ✓ 当核象素处在图象中的灰度一致区域，USAN的面积会达到最大。
    - ✓ 当核处在直边缘处该面积约为最大值的一半，而当核处在角点处则为最大值的1/4
  - 使用USAN面积作为特征起到了增强边缘和角点的效果

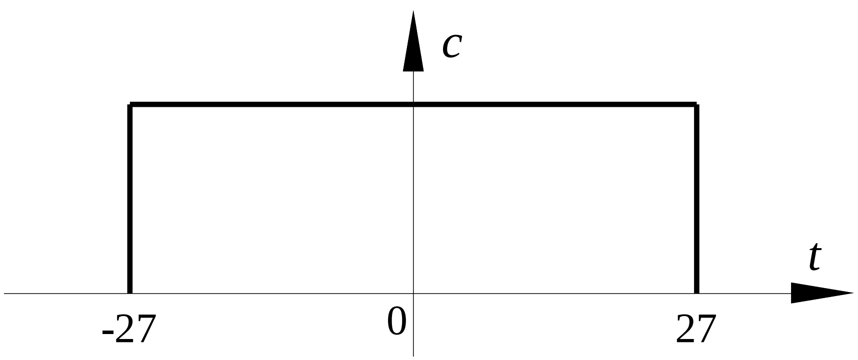


边缘检测 V：SUSAN算子

- SUSAN：最小（Smallest） 核同值区(USAN)
  - 检测模板：37个象素, 半径为3.4象素

$$C(x_0, y_0; x, y) = \begin{cases} 1 & \text{如果} \quad |f(x_0, y_0) - f(x, y)| \le T \\ 0 & \text{如果} \quad |f(x_0, y_0) - f(x, y)| > T \end{cases}$$





边缘检测 V：SUSAN算子

- 检测对模板中的每个象素进行
- 得到输出的游程和（running total）

$$S(x_0,y_0)=\sum_{(x,y)\in N(x,y)} C(x_0,y_0;x,y)$$

- 边缘响应：

$$R(x_0,y_0)=\begin{cases} G-S(x_0,y_0) & \text{如果} \quad S(x_0,y_0)<G \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

  - 几何阈值G = 3Smax/4 （为了达到最佳信噪比）， 其中Smax是S所能取的最大值，即模版面积。
  - 物理意义：核同值区面积越小，边缘响应值越大

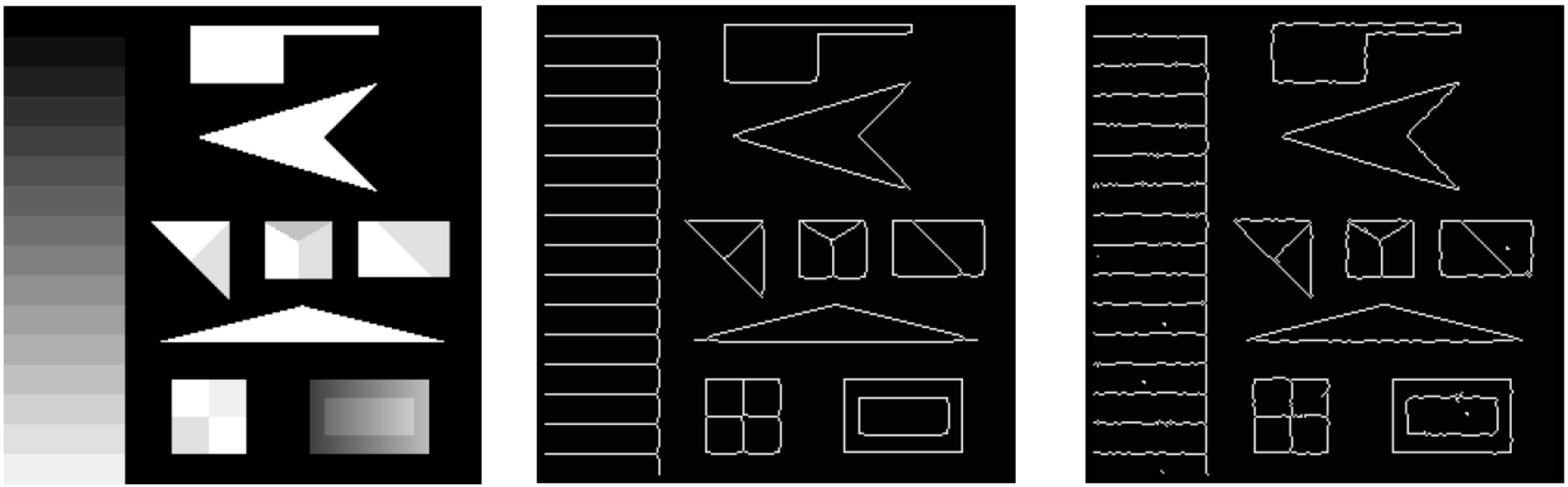
边缘检测 V：SUSAN算子

- SUSAN算子特点
  - 有噪声时的性能较好
    - 不需要计算微分
    - 对面积计算中的各个值求和（积分）
    - 非线性响应特点
  - 易自动化实现
    - 控制参数的选择简单
    - 参数的任意性较小

图 5.1.5　用 SUSAN 算子检测到的角点

边缘检测 V：SUSAN算子

□ SUSAN算子检测实例



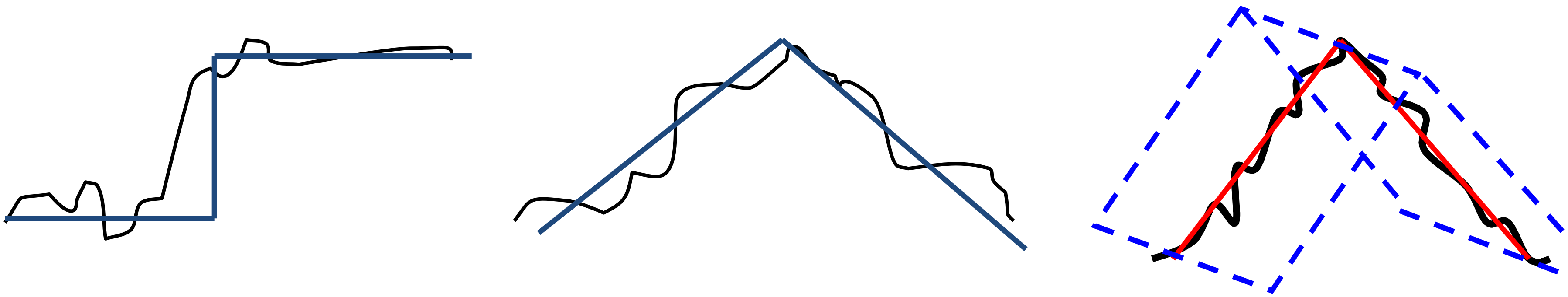
左：原图。 中：SUSAN检测结果。 右：含高斯白噪声的结果。(SNR=0.5)

边缘检测

- 边缘是图象中对象的基本的特征之一，可以通过检测物体边缘来提取所需物体
  - 边缘模型
  - 边缘检测算子
  - **边缘拟合**
  - 边缘搜索
  - 多尺度边缘检测

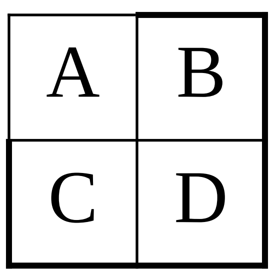
边缘拟合(Edge Fitting)

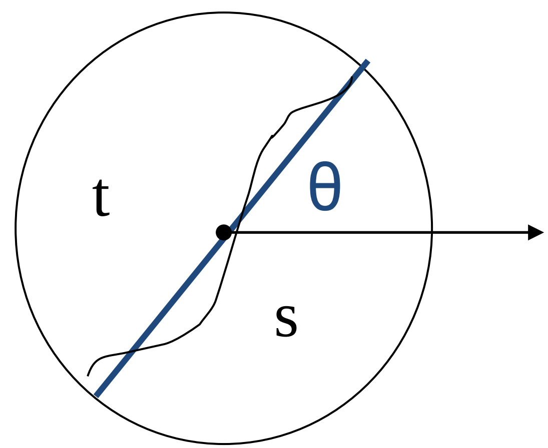
- 对图象中一个子区域，用理想灰度阶跃或斜变去拟合实际图象数据，从而求出拟合的理想模型参数，如阶跃幅度、斜变倾角等，并以此为这个子区域的边缘强度和方向度量
- 从某种意上说，拟合本质是一种匹配滤波，旨在从失真和噪声中检测出理想边缘来。因此，有较强的抗噪声能力

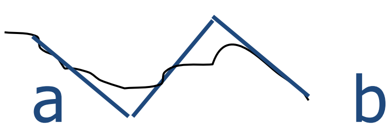


灰度阶跃的拟合

- 构造原图象（或子图、小区域）的拟合曲面，再在拟合曲面上利用曲面的参数检测出边缘
  - 如：灰度阶跃边缘拟合。
    - ✓ 用理想灰度阶跃模型去拟合一个2×2的子图
    - ✓ 将子图f(x,y)展开成基函数表达式。由均方误差最小求边缘幅度和角度







灰度阶跃的拟合

$$H(x,y)=\begin{cases} s & x\sin\theta > y\cos\theta \\ t & \text{其他} \end{cases}$$

A	B
C	D

在第一象限，有：

$$\theta=\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{B-C}{A-D}\right)$$

$$\mathrm{s}=\frac{\mathrm{B}}{4}-\frac{A-D}{2}$$

$$\mathrm{t}=\frac{\mathrm{B}}{4}+\frac{A-D}{2}$$

边缘幅度：$|\mathrm{s}-\mathrm{t}|=|A-D|$

当 θ 在第二象限：

边缘幅度：$|\mathrm{s}-\mathrm{t}|=|\mathrm{B}-\mathrm{C}|$

整副图象边缘幅度：$\max\{|A-D|,|\mathrm{B}-\mathrm{C}|\}$

与Roberts算子的结果相同

基于斜面模型的边缘检测

拟合模型

- 将M×N的数字图象划分为相连接的区域集合P，P=($P_1,P_2,\ldots,P_i,\ldots$)
- Pi的大小设为R×C（通常为3×3）

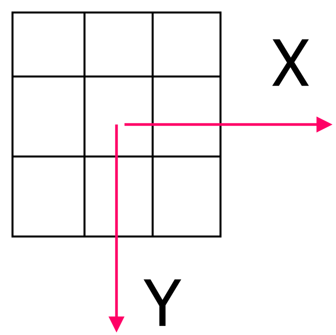
$$\hat{f}(x,y)=\alpha x+\beta y+\gamma$$

- 对每一个小区域，用一个斜平面来近似
- 拟合误差：

$$e^2=\sum_{R}\sum_{\times C}[\alpha x+\beta y+\gamma-f(x,y)]^2$$

斜面拟合

- 由均方误差最小来求 α、β、γ,
- 区域 3×3,原点取在中心点时，有:



$$\alpha = \sum_{R\times C}\sum x\, f(x,y) \Big/ \sum\sum x^2$$

$$\beta = \sum_{R\times C}\sum y\, f(x,y) \Big/ \sum\sum y^2$$

$$\gamma = \sum_{R\times C}\sum f(x,y) \Big/ \sum\sum 1$$

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$\Big/ \sum\sum$$

代入误差算式，得出误差值。

误差较小时，认为拟合可靠。

斜面交界的判断

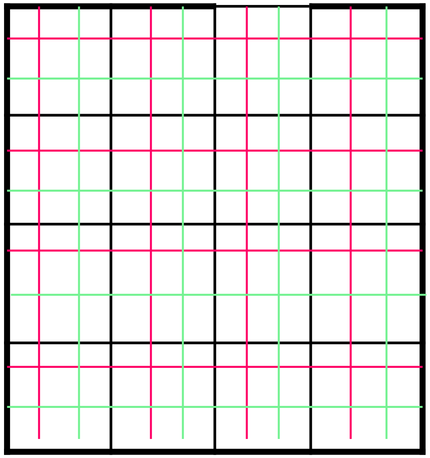
- 对于“可靠”的斜面，把该拟合斜平面的参数作为小区域的参数（不重叠划分) 或小区域中心点的参数(重叠划分）。

- 有：梯度值为：$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

  方向为：$\theta = \tan^{-1}\dfrac{\alpha}{\beta}$

- 然后用斜面参数判断各个斜面间是否有边缘存在

即考察$\alpha_1=\alpha_2$?　$\beta_1=\beta_2$?　$\gamma_1=\gamma_2$?



基于斜面拟合的边缘检测

- 一般步骤
  - 选取适合的拟合区域
  - 根据模型求解拟合系数
  - 求拟合斜面各点灰度值
  - 计算误差，判断斜面的可靠性
  - 对于可靠的斜面，计算相邻点或区域不在同一斜面上的度量
  - 选出边缘度量值局部最大的点，定为边缘点

边缘搜索：跟踪方法

- 跟踪的一般步骤：
  - 确定搜索的起点，对于边缘跟踪则起点是某一边缘点
  - 采取一种合适的数据结构和搜索机理，在已有边缘点的基础上进行搜索，不断确定新的边缘点
  - 规定搜索终止的条件，在满足条件时停止搜索

9				8			5
	5				6		4
		9			5		
6			4			7	
	7		6	2		9	
4		6			4		7
		5		2	6		
6	4				7		

$T_d = 7$

$T_t = 4$

边缘搜索：图搜索

□ 基本概念

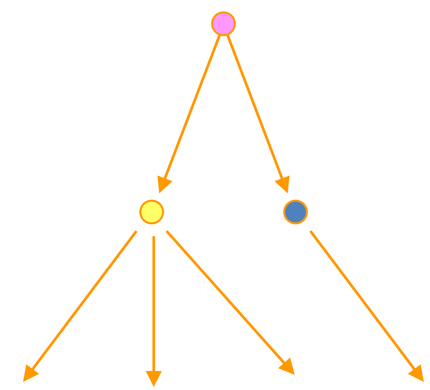
- 边界点和边界段可以用图结构标示，通过在图中搜索达到某一目标的最佳路径（最短路径，最小消耗路径）寻找边缘 。
- 路径评价函数可以定义为：$f(n)=g(n)+h(n)$
  - ✓ n: 搜索过程进行到的当前节点。
  - ✓ g(n)： 为从起始节点到当前节点所有路径代价。
  - ✓ h(n) :是当前节点到目标节点将要经过的所有路径的代价。（一般为对真实代价h(n)的估计值， 从而为启发项）

边缘搜索：图搜索

- 将边缘象素和边界段用图表示

图：$G = \{N, A\}$

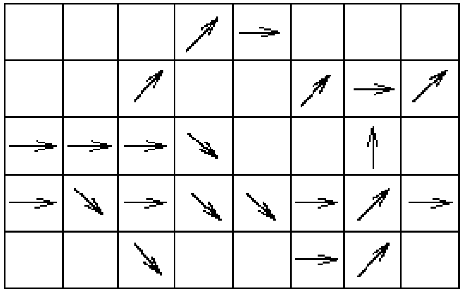
结点集$\{n_1, \ldots\}$　　　　结点对集$\{(n_i, n_j)\}$

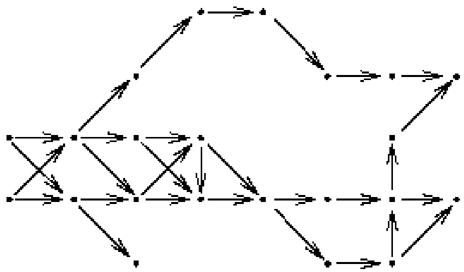


- 通路代价：通常跟灰度值的变化是相关的

- 图的建立

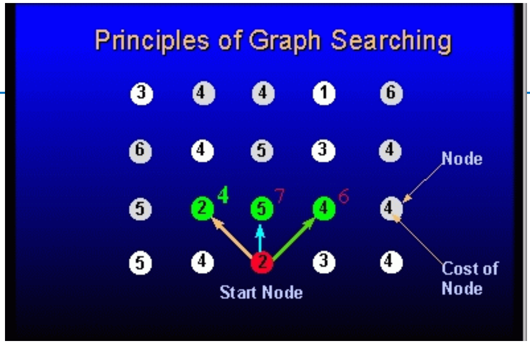
$$C = \sum_{i=2}^{K} c(n_{i-1}, n_i)$$





（左）显著边缘点的方向　（右）相应的图

图搜索算法



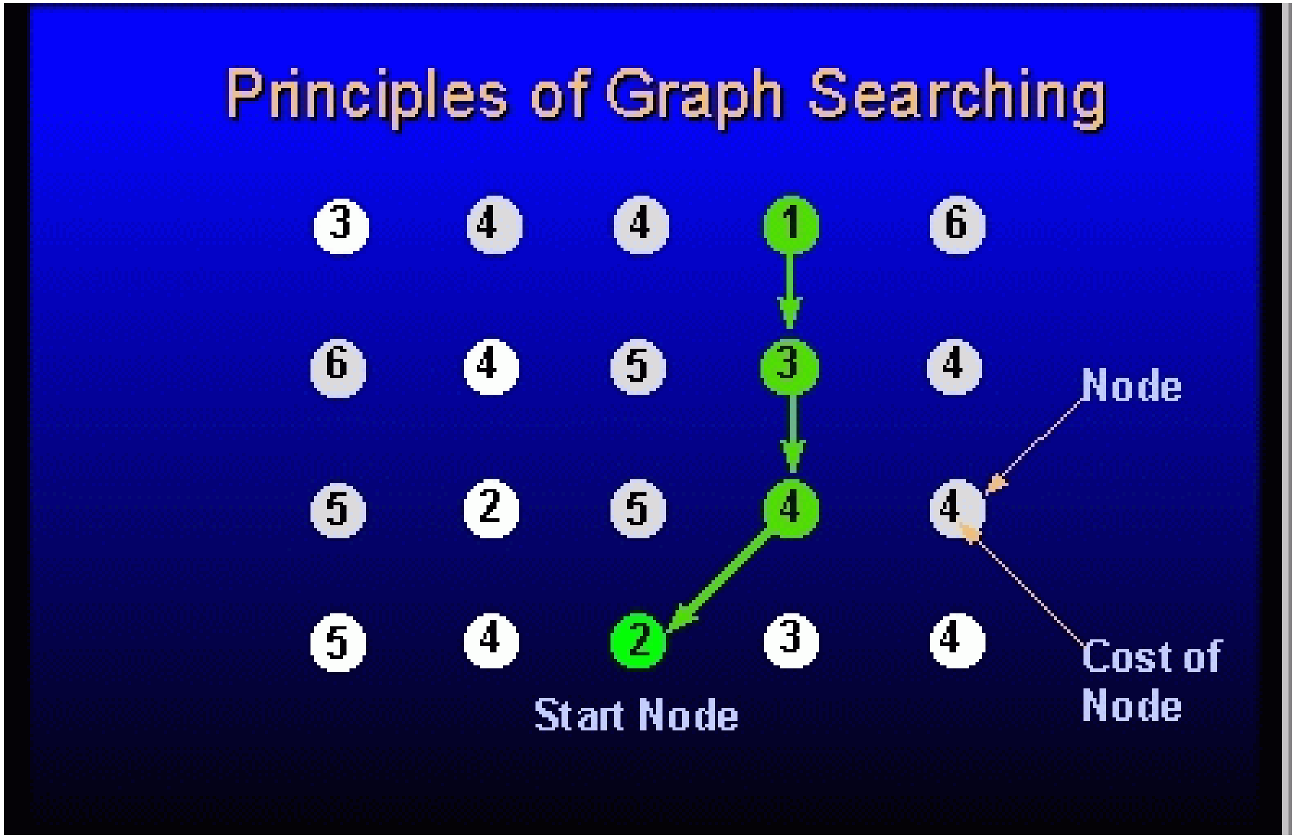
Heuristic graph search

1. Expand the starting node n_A and put all its successors into an OPEN list with pointers back to the starting node n_A. Evaluate the cost function f for each expanded node.

2. If the OPEN list is empty, fail.
   Determine the node n_i from the OPEN list with the lowest associated cost $f(n_i)$ and remove it. If $n_i = n_B$, then trace back through the pointers to find the optimum path and stop.

3. If the option to stop was not taken in step (2), expand the specified node n_i, and put its successors on the OPEN list with pointers back to n_i. Compute their costs f. Go to step (2).

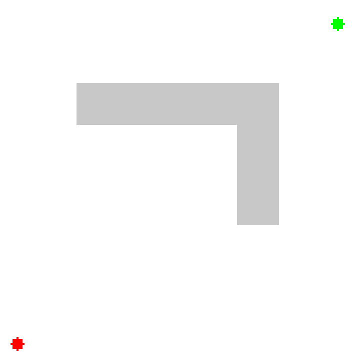
图搜索实例


Principles of Graph Searching
3
4
4
1
6
6
4
5
3
4
Node
5
2
5
4
4
5
4
2
3
4
Cost of
Node
Start Node

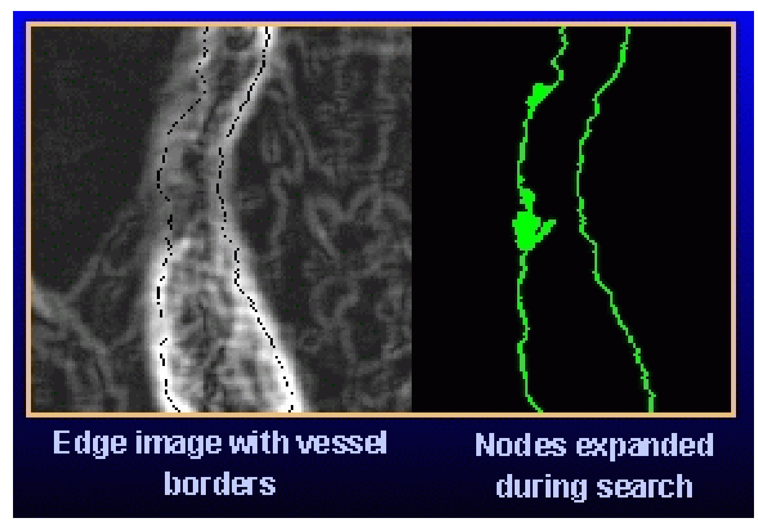
启发式图搜索

- 利用问题拥有的启发信息来引导搜索，
  - 减少搜索范围
  - 降低问题复杂度
- 代价函数 $f(n)=g(n)+h(n)$
  - 启发项 $h(n)$ 能加快搜索速度，但不一定能找到全局最优。
  - 当无启发项（ $h(n)=0$ ）时，一定能找到全局最优，但搜索范围加大。

普通搜索过程演示



启发式搜索过程演示



代价函数的设计

- 使用“启发”信息，构造评价函数，计算路径的耗费，是启发式搜索的关键。
- 具体如何构造则要分析该问题的具体情况，将多种因素合理的分离开来，把实际情况中的约束转化为计算机可操作的表达式。
  - 灰度梯度的幅度
  - 灰度梯度的方向
  - 路径的曲率
  - 路径与某一函数的近似程度
  - 到目标点的距离等
  -

4.5 多尺度边缘检测

现象

- 大尺度下能较可靠地消除误检，检测到真正边缘点，但定位不准；
- 小尺度定位较准，但误检增加；
- 大尺度检测真正边缘点，小尺度精确定位
- 图像不同的边缘信息会在不同的尺度下表现

方法

- 融合各个尺度的检测结果，获得稳定的边缘信息。

基于二进小波的多尺度边缘检测

用于边缘检测的二进小波：

母函数：$\varphi(x,y)=\exp(-(x^2+y^2)/\sigma^2)/2\pi\sigma^2$；(高斯核函数)

小波函数：$\psi^1=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x};\psi^2=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y};$

二进小波变换：$S_{2^j}f\to\{W_{2^j}^1 f, W_{2^j}^2 f, S_{2^{j+1}}f\}$ (离散算法$\alpha-$trous)

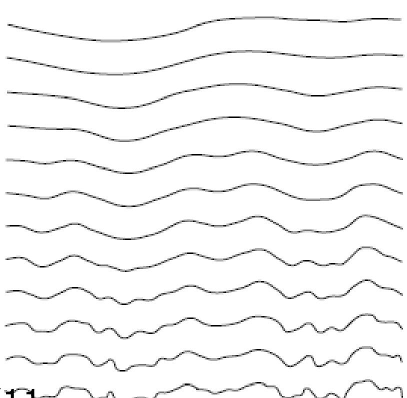
$W_{2^j}^i f=\left\langle f,\psi_{2^j}^i\right\rangle; i=1,2;$ (分别对应水平和竖直边缘)

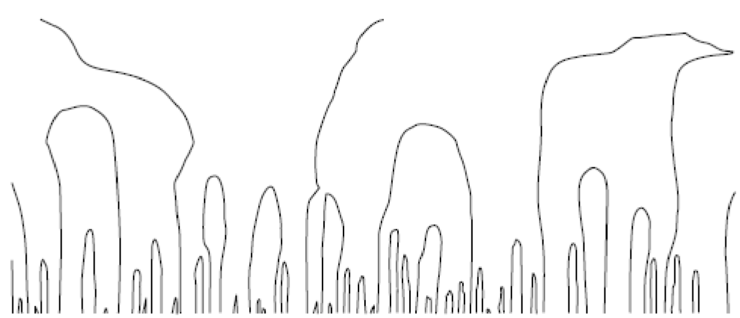
$S_{2^{j+1}}f=\left\langle f,\varphi_{2^j}\right\rangle;$ (平滑信号)

模值 $M_{2^j}f=\sqrt{|W_{2^j}^1 f|^2+|W_{2^j}^2 f|^2}$； 幅角 $A_{2^j}f=\arctan(W_{2^j}^1 f/W_{2^j}^2 f)$;

模极大链：

小波系数的模极大值(即导数的过零点)，在尺度空间会形成"向下开口"的连续曲线。

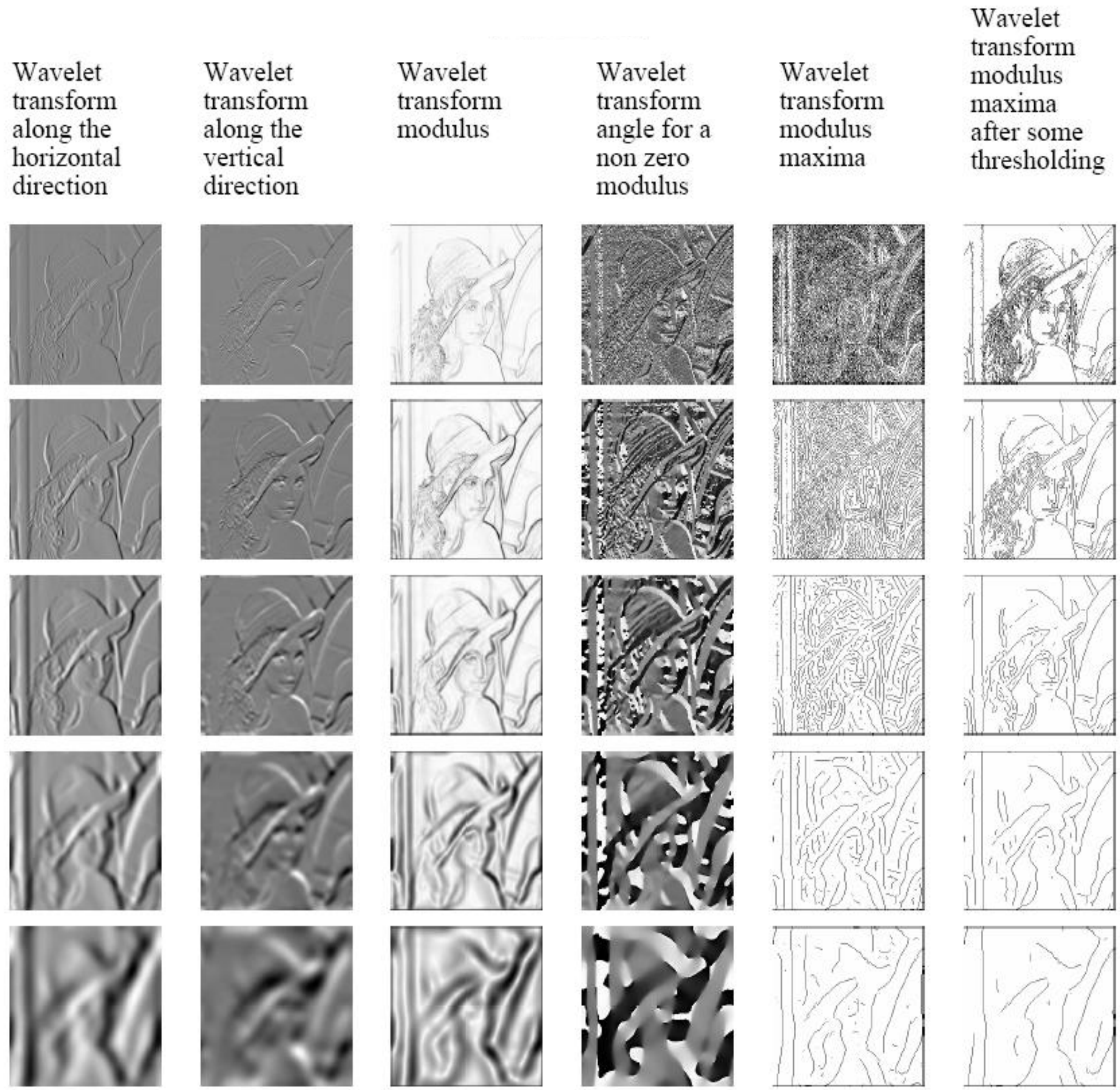




左：不同尺度的平滑信号

右：尺度空间的模极大链

基于二进小波的多尺度边缘检测



基于二进小波的多尺度边缘检测

□ 算法步骤：

1.选择二进小波$\{\psi^1,\psi^2\}$，分解级数J，和模阈值T；

2.对图像f进行二进小波变换，得到$S_{2^J}f$和$\left\{W_{2^j}^1 f, W_{2^j}^2 f\right\}_{j=1}^{J}$；

3.计算模值 $M_{2^j}f=\sqrt{|W_{2^j}^1 f|^2+|W_{2^j}^2 f|^2}$；

4.计算幅角 $A_{2^j}f=\arctan(W_{2^j}^1 f / W_{2^j}^2 f)$；

5.用非极大值抑制得到小波系数的局部模极大值点；

6.把局部模极大值点延尺度连起来，得到极值链；

7. 利用模阈值T和极值链长度阈值，去除由噪声引起或不感兴趣的的边界；