



第五章：图像增强

中国科学技术大学
电子工程与信息科学系

主讲教师：李厚强 (lihq@ustc.edu.cn)
周文罡 (zhwg@ustc.edu.cn)
李 礼 (lil1@ustc.edu.cn)
胡 洋 (eeyhu@ustc.edu.cn)



图像增强

- 什么是图像增强？
- 灰度变换与空域滤波
- 图像频域滤波



图像增强

- 什么是图像增强?
- 灰度变换与空域滤波
- 图像频域滤波

图像增强

- 图像增强是一种重要的**图像处理**方法，它的目标是**提高图像的质量**，使之适合于人眼或机器的观察判断，以及进一步的分析处理。





图像增强

- 什么是图像增强？
- 灰度变换与空域滤波
- 图像频域滤波



灰度变换与空域滤波

□ 空间域灰度变换

- 基本灰度变换
- 直方图处理

□ 空域滤波

- 空间域滤波基础
- 空域平滑
- 空域锐化



空间域灰度变换

- 空间域：包含图像像素的简单平面
- 空间域灰度变换

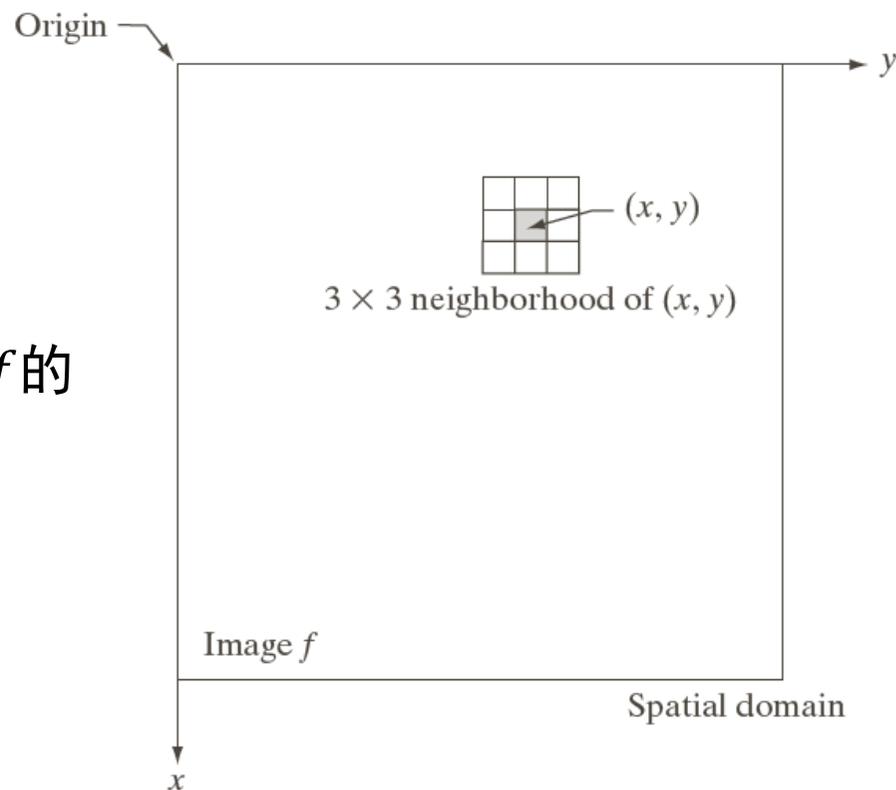
$$g(x, y) = T(f(x, y))$$

$f(x, y)$: 输入图像

$g(x, y)$: 输出图像

T : 在点 (x, y) 的邻域上定义的关于 f 的一种算子

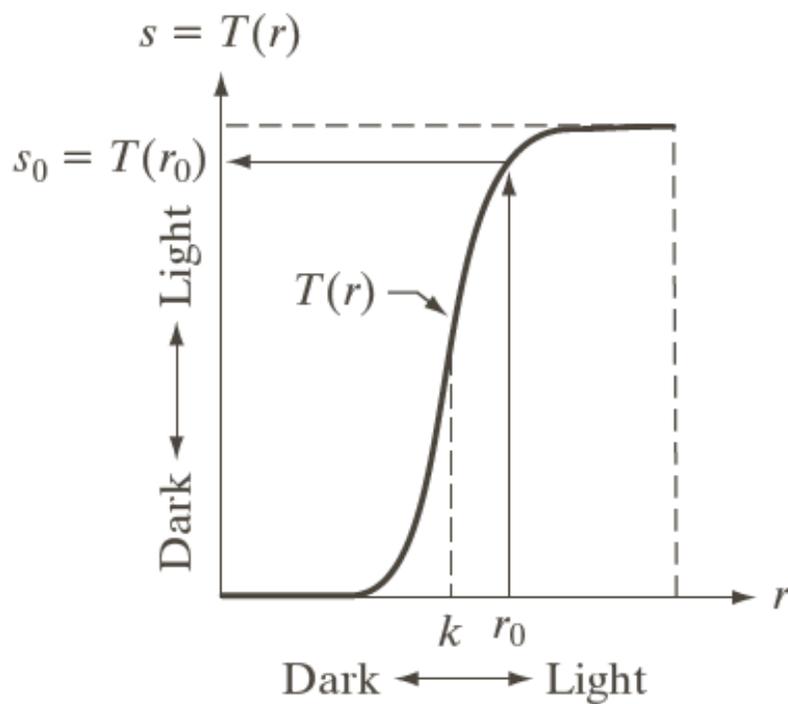
- 空间邻域
 - 决定了灰度操作的范围
 - $1 \times 1, 3 \times 3$



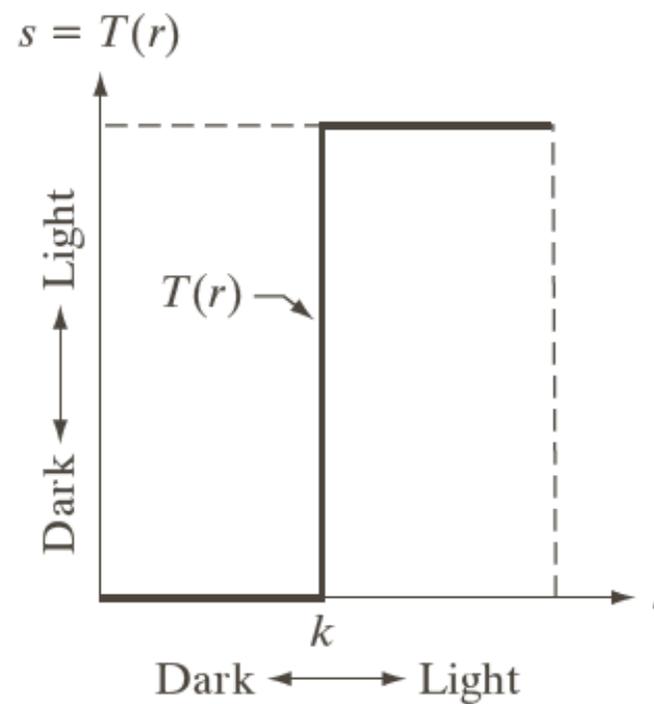


灰度变换

□ 邻域为 1×1 时的灰度变换



对比度拉伸函数



阈值处理函数



灰度变换与空域滤波

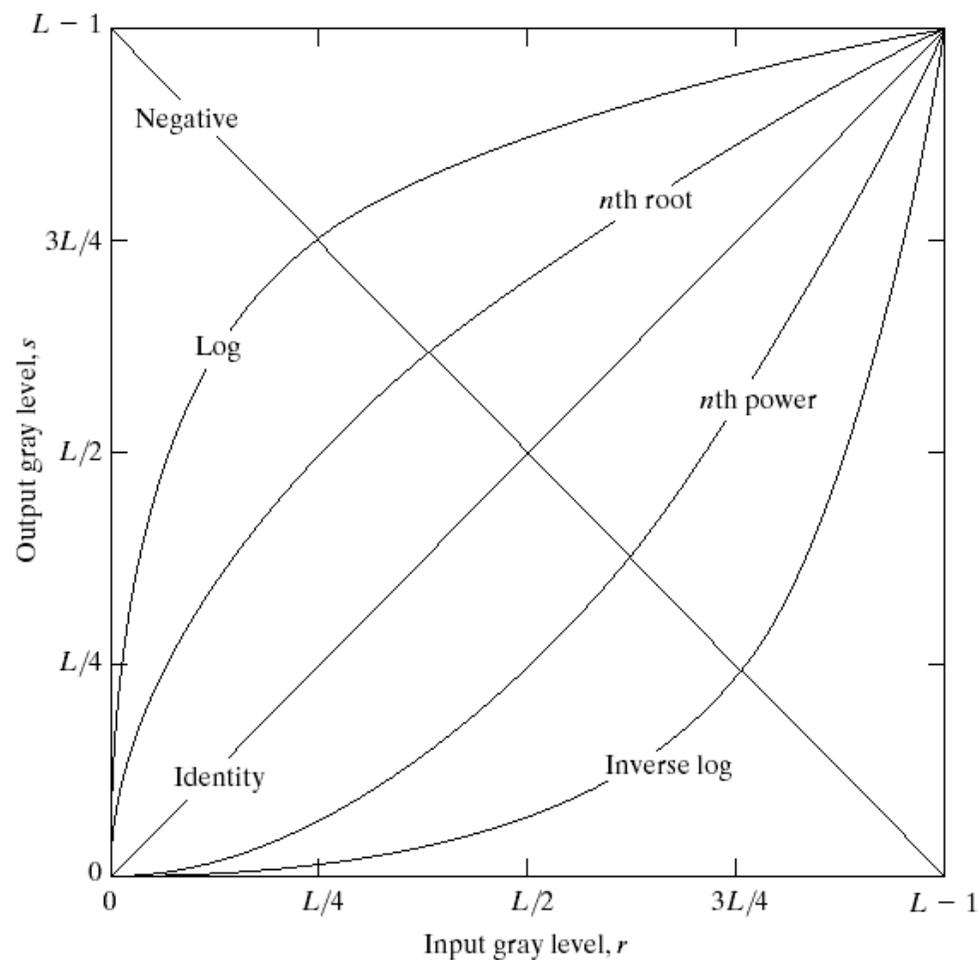
- 空间域灰度变换
 - 基本灰度变换
 - 直方图处理
- 空域滤波
 - 空间域滤波基础
 - 空域平滑
 - 空域锐化



常见灰度变换

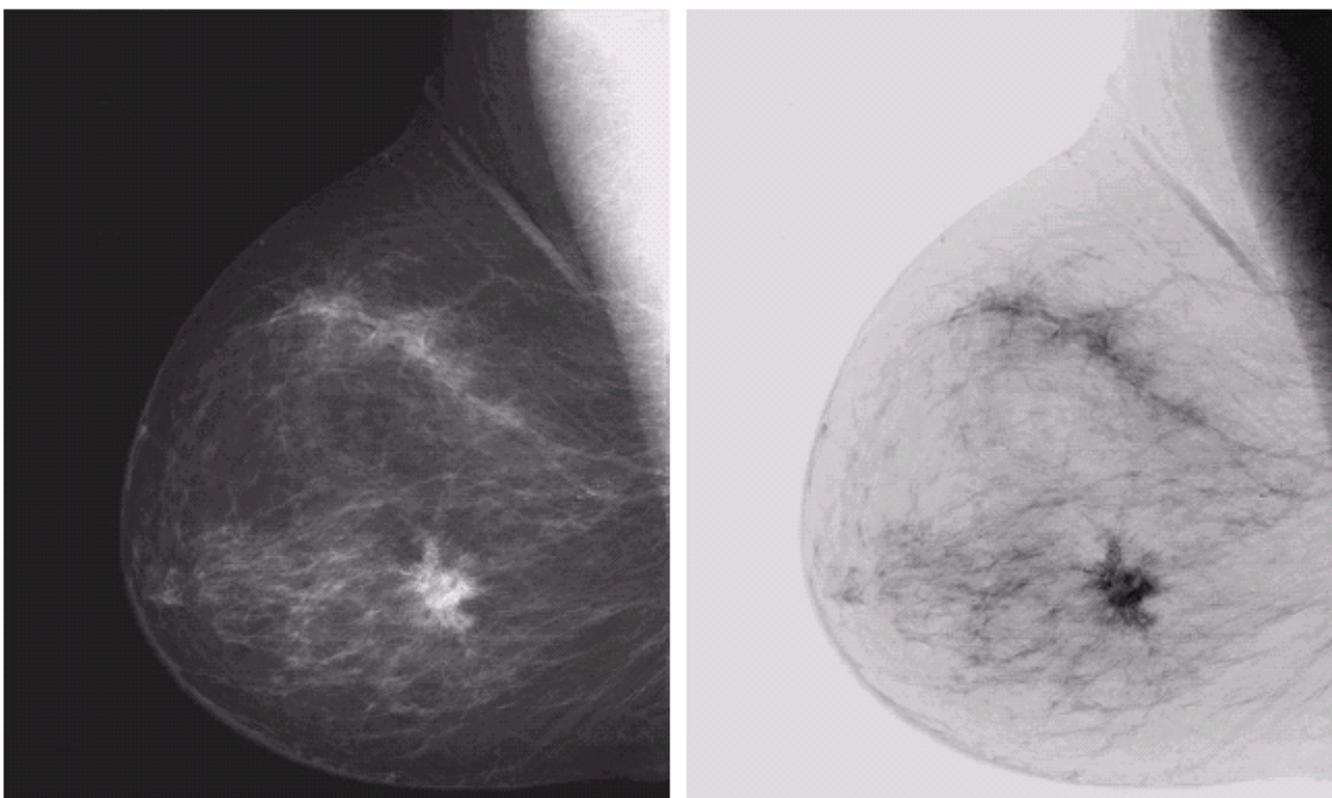
□ 灰度变换 $s = T(r)$

■ r 为数字量且取值有限，该映射可通过查找表实现



图像求反

- 灰度变换函数： $s = L - 1 - r$
 - 适用于增强嵌入图像暗色区域中的白色或灰色细节



a b
FIGURE 3.4
(a) Original digital mammogram.
(b) Negative image obtained using the negative transformation in Eq. (3.2-1).
(Courtesy of G.E. Medical Systems.)

对数变换

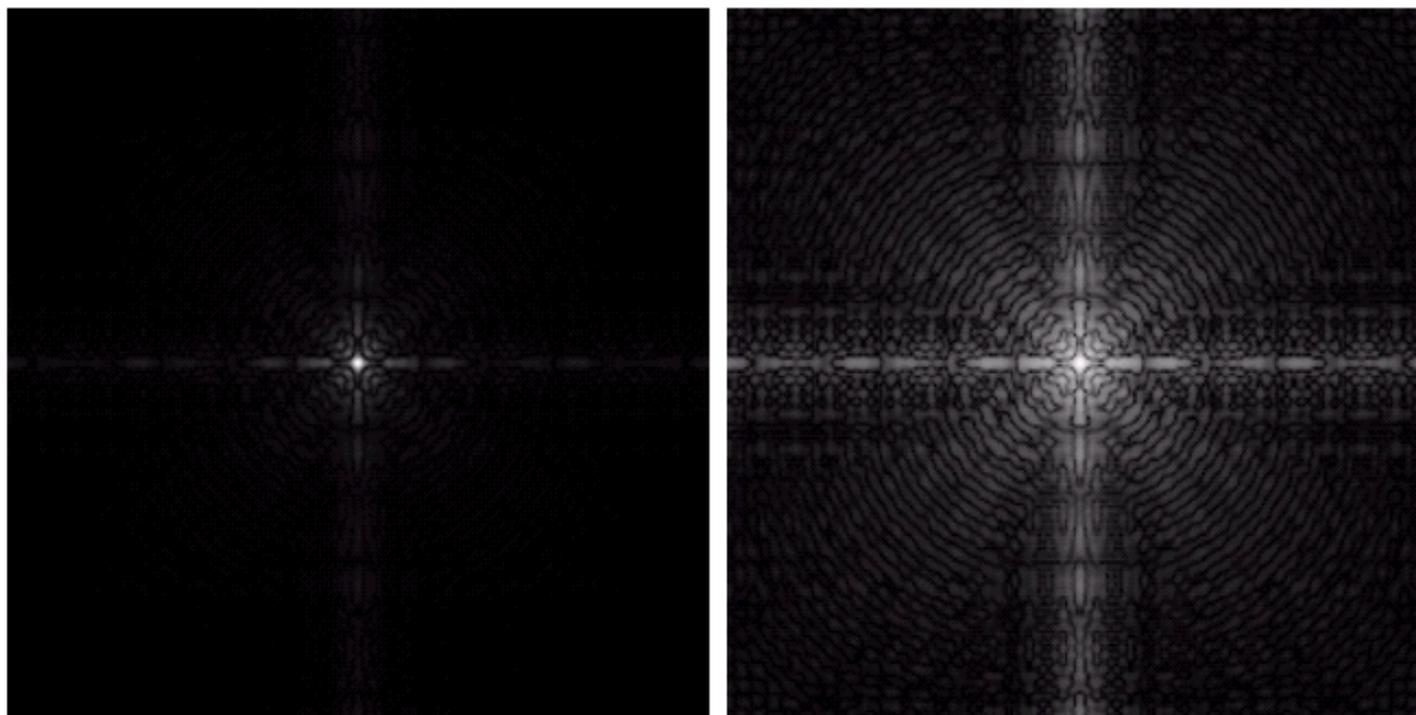
□ 灰度变换函数： $s = c \cdot \log(1 + r)$

a b

FIGURE 3.5

(a) Fourier spectrum.

(b) Result of applying the log transformation given in Eq. (3.2-2) with $c = 1$.





幂律变换

□ 灰度变换函数： $s = c \cdot r^\gamma$

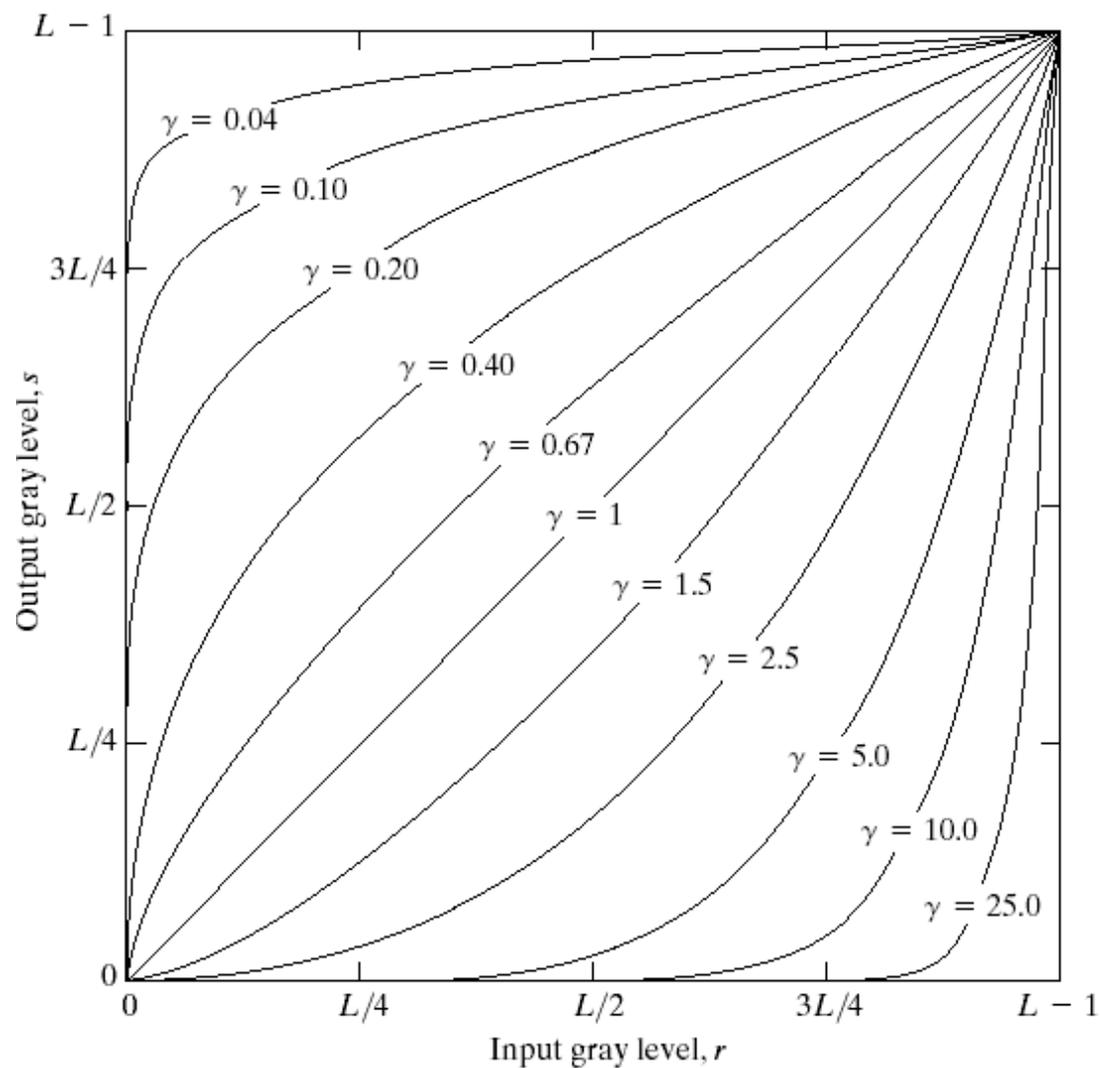


FIGURE 3.6 Plots of the equation $s = cr^\gamma$ for various values of γ ($c = 1$ in all cases).

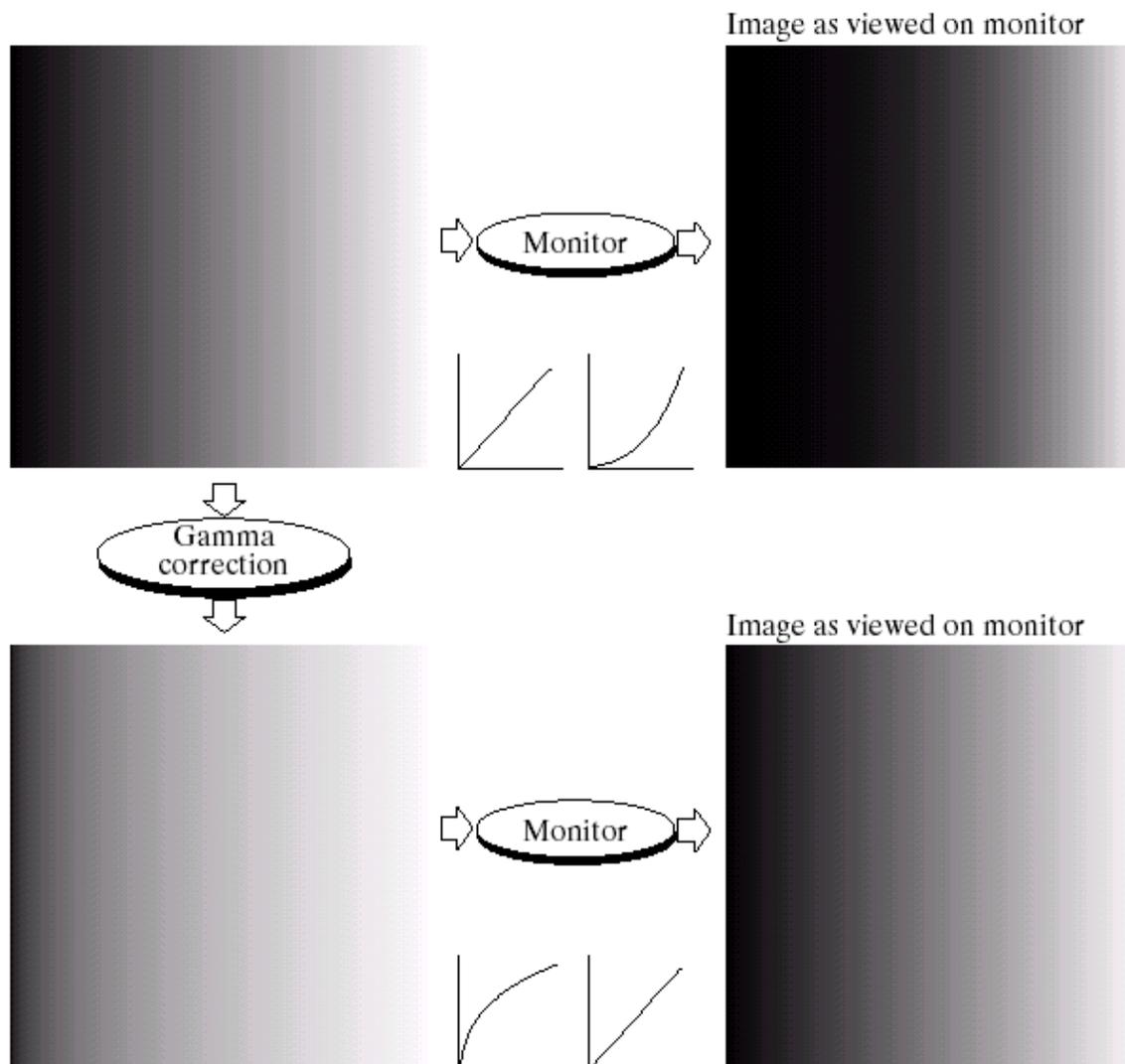
幂律变换：伽马校正

□ 用于缓解显示设备的非线性亮度映射

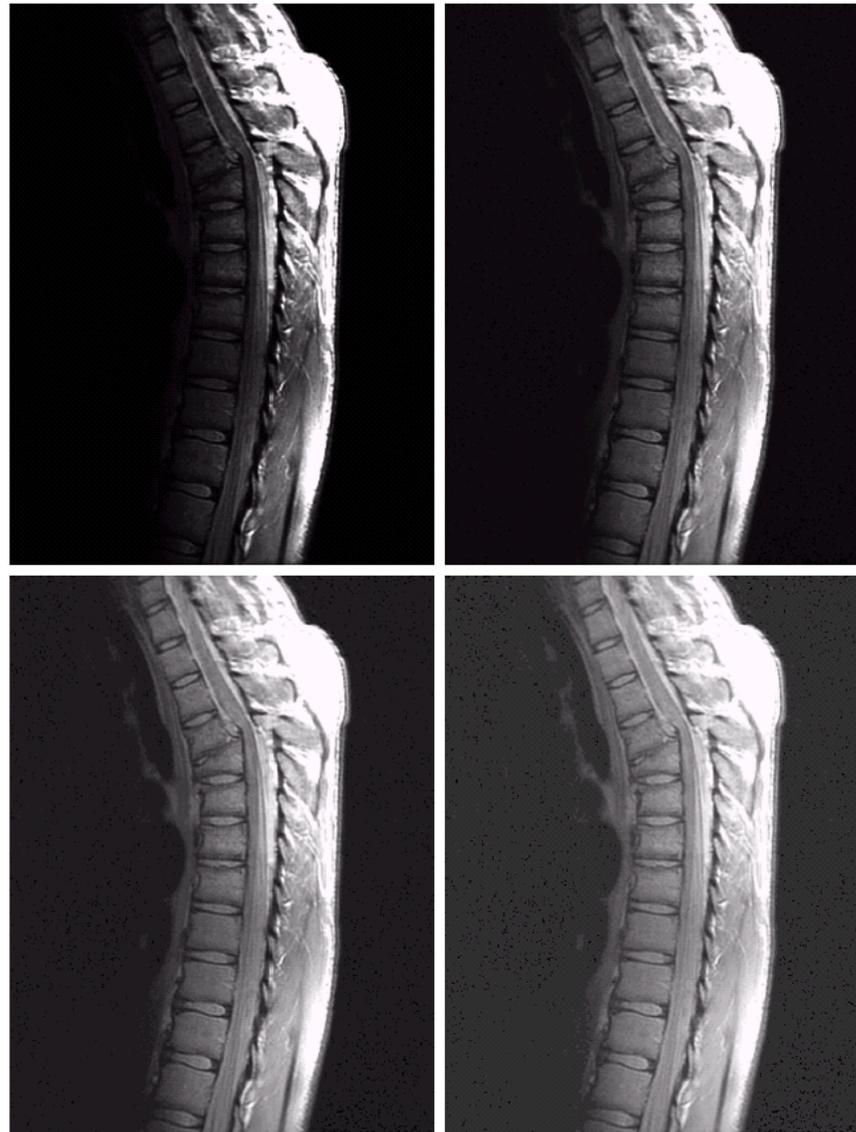
a b
c d

FIGURE 3.7

(a) Linear-wedge gray-scale image.
(b) Response of monitor to linear wedge.
(c) Gamma-corrected wedge.
(d) Output of monitor.



幂律变换



a	b
c	d

FIGURE 3.8

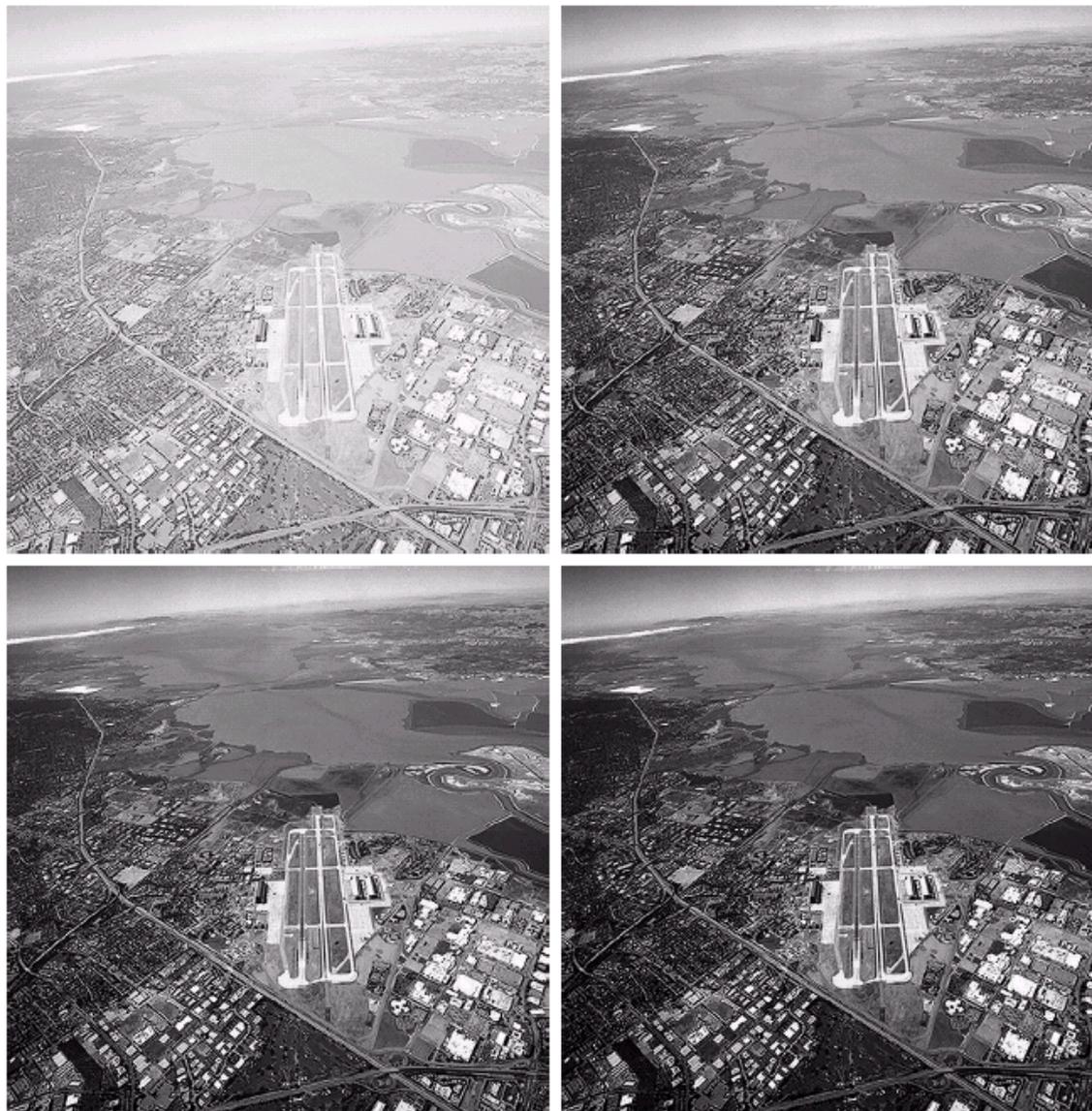
(a) Magnetic resonance (MR) image of a fractured human spine.
(b)–(d) Results of applying the transformation in Eq. (3.2-3) with $c = 1$ and $\gamma = 0.6, 0.4,$ and $0.3,$ respectively. (Original image for this example courtesy of Dr. David R. Pickens, Department of Radiology and Radiological Sciences, Vanderbilt University Medical Center.)

幂律变换



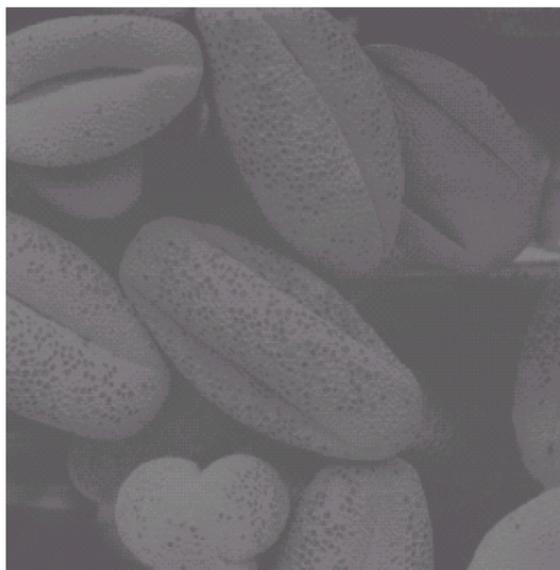
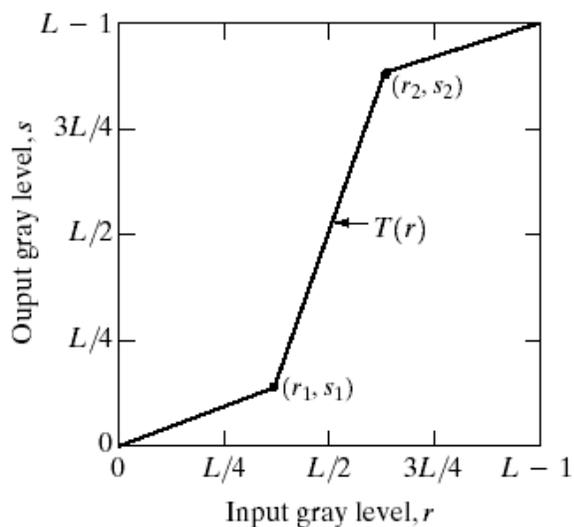
a b
c d

FIGURE 3.9
(a) Aerial image.
(b)–(d) Results of
applying the
transformation in
Eq. (3.2-3) with
 $c = 1$ and
 $\gamma = 3.0, 4.0,$ and
 $5.0,$ respectively.
(Original image
for this example
courtesy of
NASA.)





分段线性变换函数—对比度拉伸

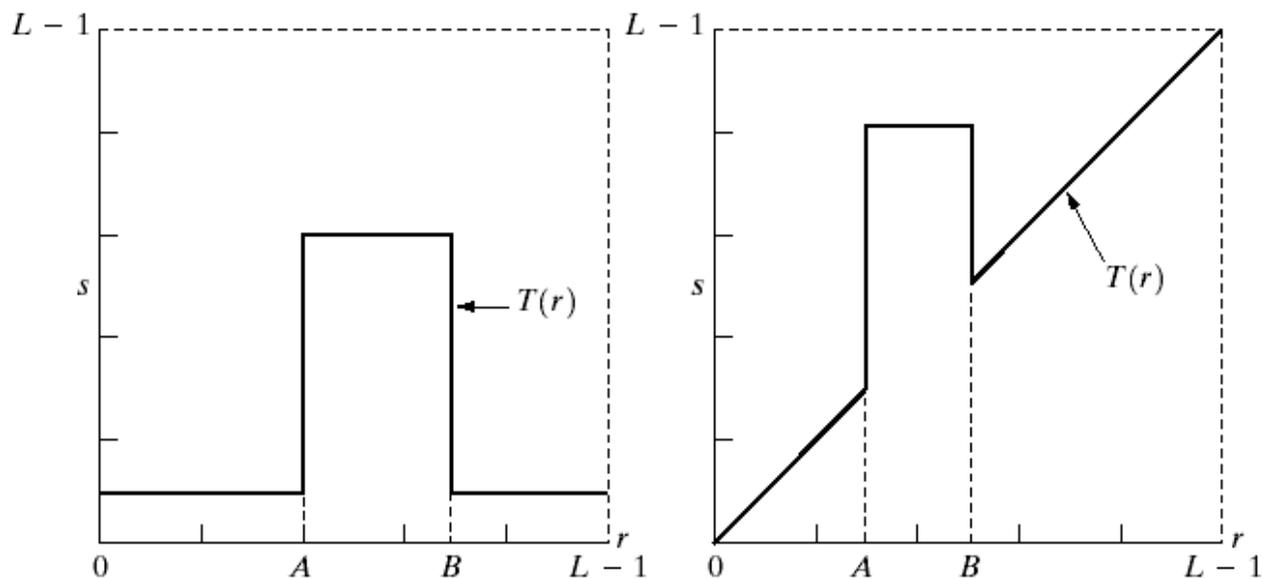


a b
c d

FIGURE 3.10
Contrast stretching.
(a) Form of transformation function. (b) A low-contrast image. (c) Result of contrast stretching. (d) Result of thresholding. (Original image courtesy of Dr. Roger Heady, Research School of Biological Sciences, Australian National University, Canberra, Australia.)



分段线性变换函数—灰度级切分



a b
c d

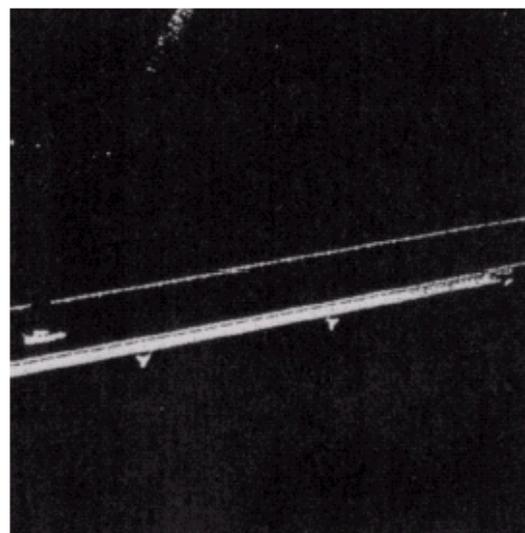
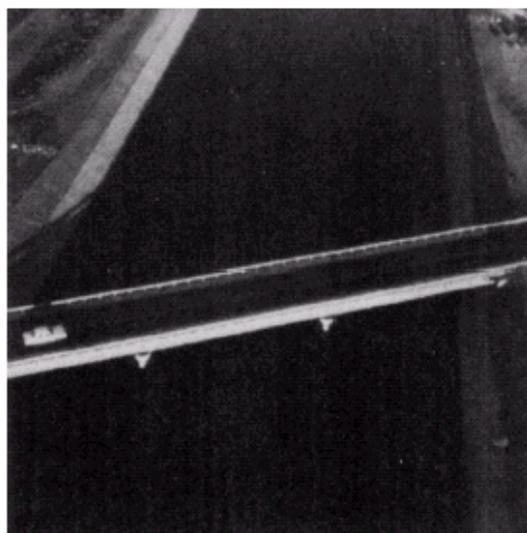
FIGURE 3.11

(a) This transformation highlights range $[A, B]$ of gray levels and reduces all others to a constant level.

(b) This transformation highlights range $[A, B]$ but preserves all other levels.

(c) An image.

(d) Result of using the transformation in (a).





分段线性变换函数—比特面分割

- 突出特定比特对整幅图像的贡献

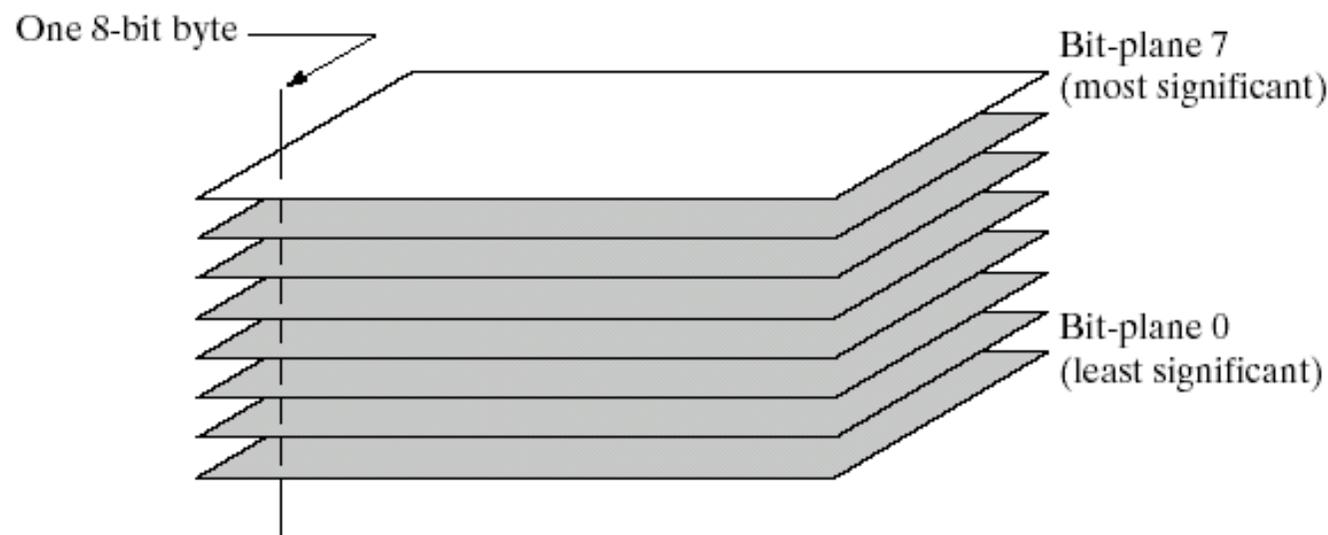


FIGURE 3.12
Bit-plane
representation of
an 8-bit image.

unsigned char $f(r, c)$; \rightarrow bool $g(b, r, c)$;

分段线性变换函数—比特面分割

□ 分形图像的比特面分割

- $f(r, c)$ 到 $g(b, r, c)$ 的函数映射关系?

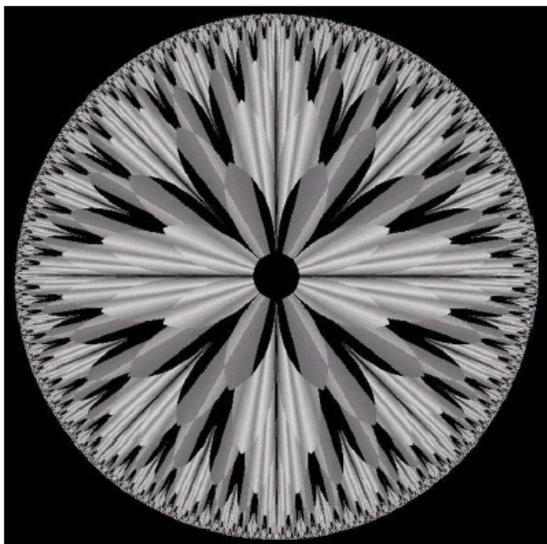


FIGURE 3.13 An 8-bit fractal image. (A fractal is an image generated from mathematical expressions). (Courtesy of Ms. Melissa D. Binde, Swarthmore College, Swarthmore, PA.)

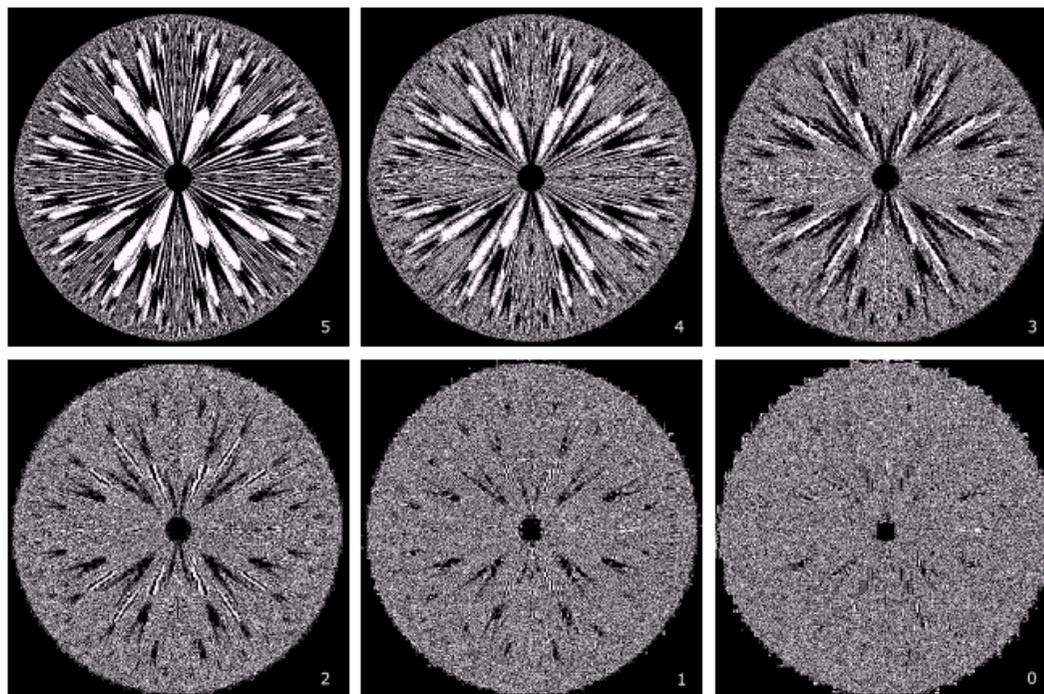
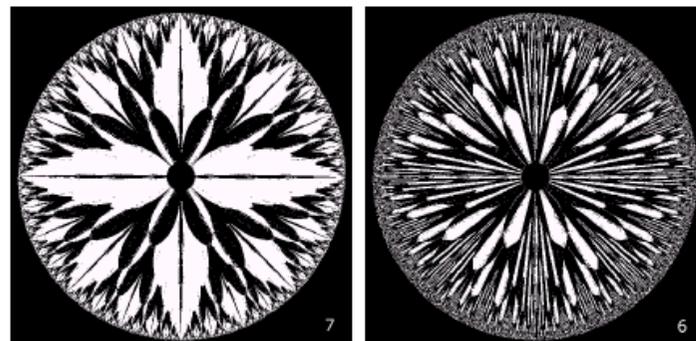


FIGURE 3.14 The eight bit planes of the image in Fig. 3.13. The number at the bottom, right of each image identifies the bit plane.



灰度变换与空域滤波

- 空间域灰度变换
 - 基本灰度变换
 - 直方图处理
- 空域滤波
 - 空间域滤波基础
 - 空域平滑
 - 空域锐化

灰度直方图

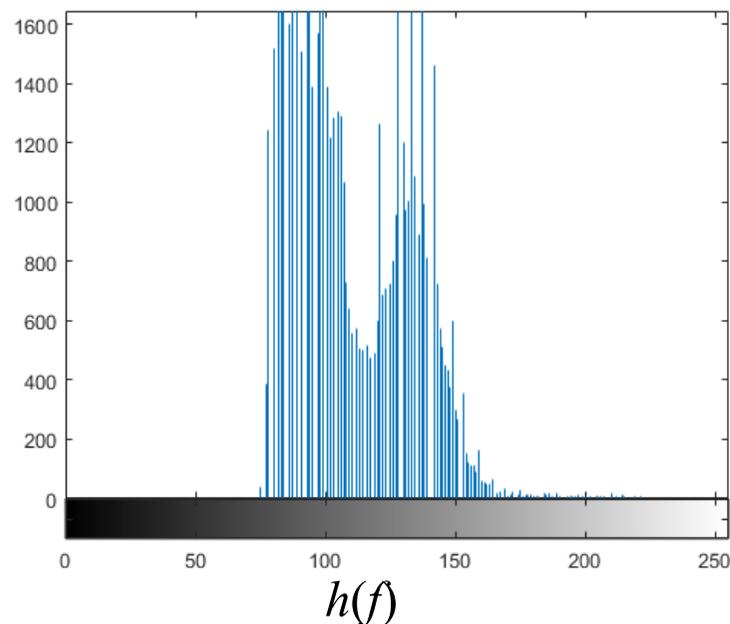
□ 灰度直方图 (histogram)

- 是一种关于灰度级的函数，它表示数字图像中每一灰度级与该灰度级出现的频数之间的对应关系
- 一幅特定的图有唯一的直方图，但反之不成立
- 直方图在一定程度上可以反映图像的状况
 - ✓ 例如: 有时可以根据直方图确定分割物体和背景的背景



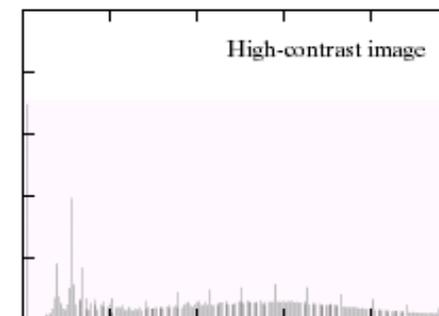
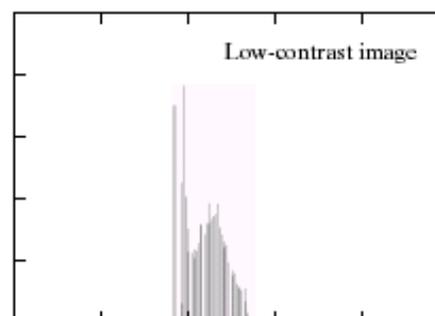
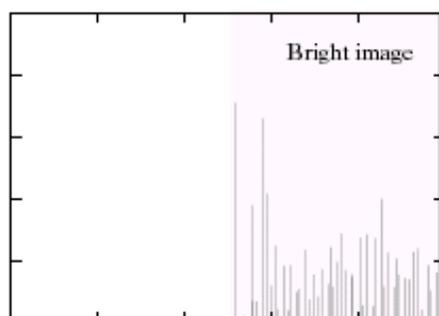
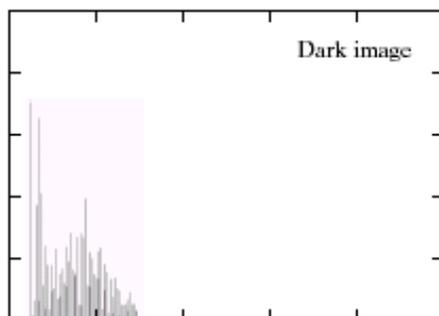
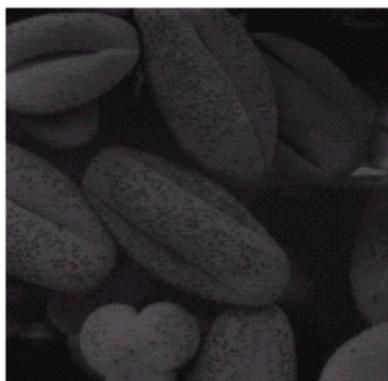
$f(r, c)$

直方图



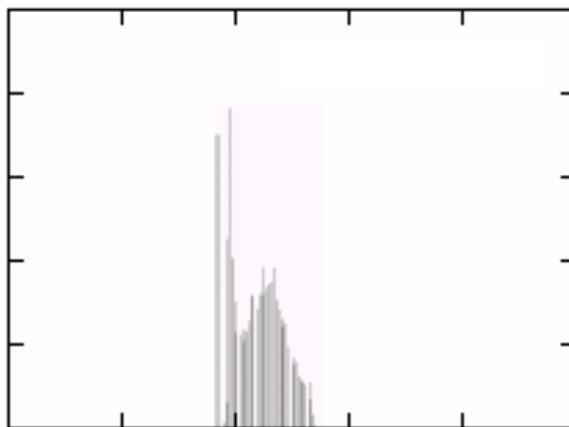
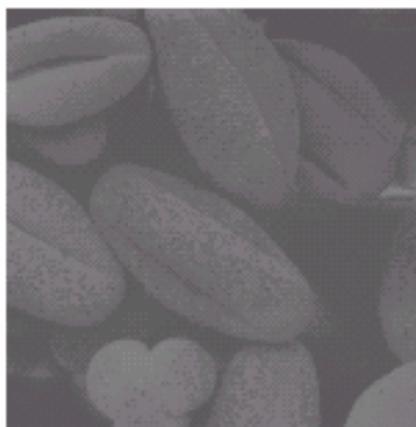
灰度直方图

- 低对比度图像的灰度级较窄
- 高对比度图像中直方图分量覆盖了很宽的灰度级范围

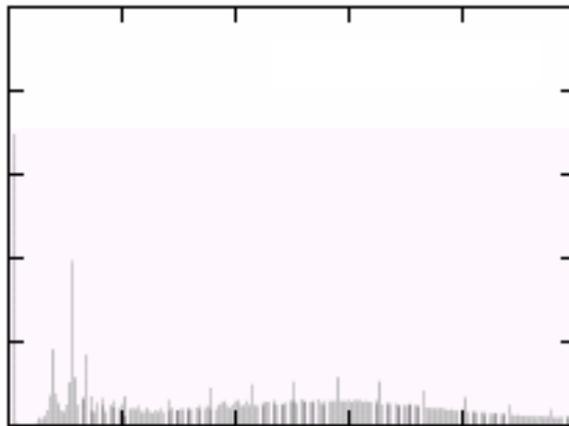


直方图修正

- 通过修改直方图可以达到增强图象的对比度、使感兴趣的部分看得更清楚



低对比度

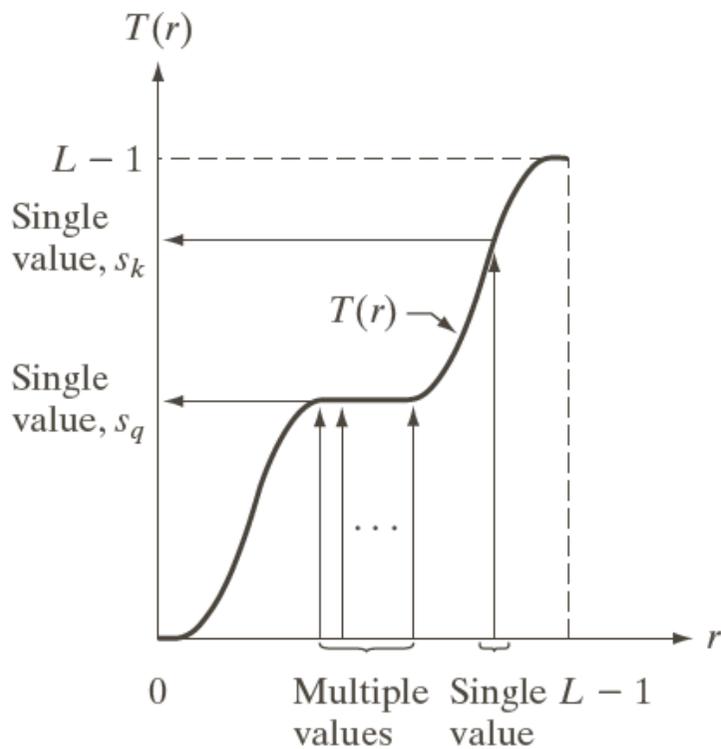


高对比度

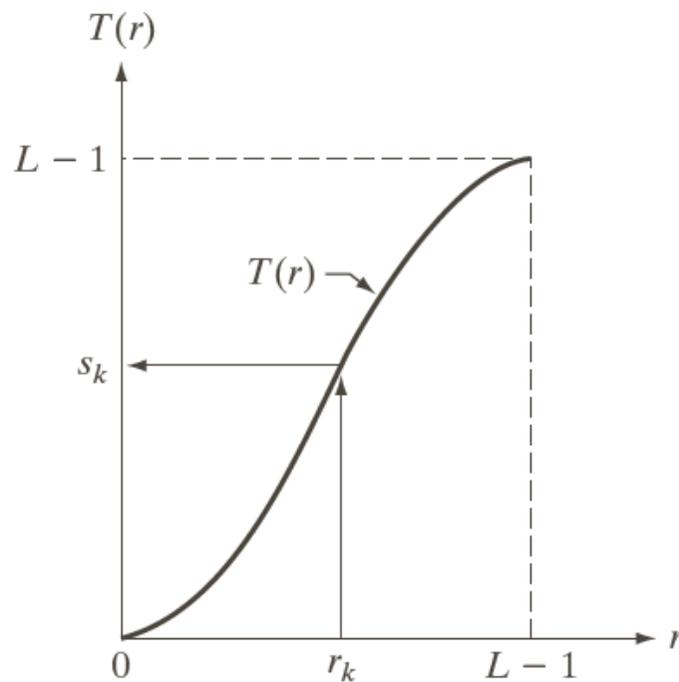


基于直方图的灰度变换

- 不改变像素的位置，只改变像素的灰度值
- 灰度变换函数：



非严格单调递增函数



严格单调递增函数



直方图均衡

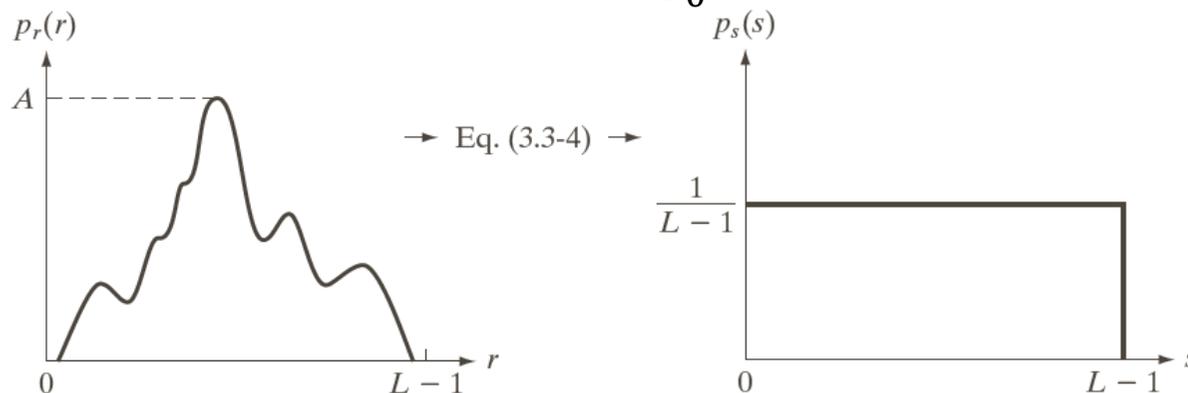
□ 直方图均衡化定义

- 输入图像灰度概率密度函数为 $p_r(r)$ ，进行灰度变换 $s = T(r)$ ，使得
 - ✓ (i) 若变换前灰度 $r_1 < r_2$ ，要求 $s_1 < s_2$ (**保序变换**)
 - ✓ (ii) 变换后的灰度直方图 $p_s(s)$ 为均匀分布

- 为满足上述条件(i)，有
$$\int_0^r p_r(w)dw = \int_0^s p_s(w)dw$$

- 为满足上述条件(ii)，有
$$\int_0^s p_s(w)dw = \frac{s}{L-1}$$

- 综上，可得：
$$s = T(r) = (L-1) \int_0^r p_r(w)dw$$



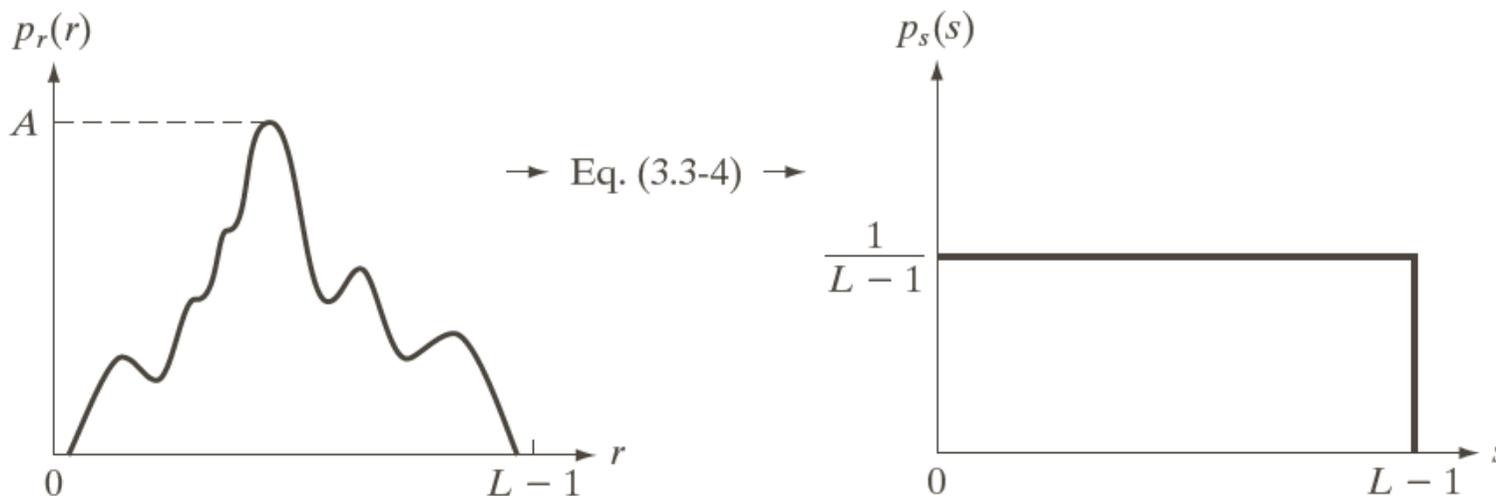


直方图均衡

$$s = T(r) = (L - 1) \int_0^r p_r(w) dw \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dr} = (L - 1) p_r(r)$$

由莱布尼茨准则,

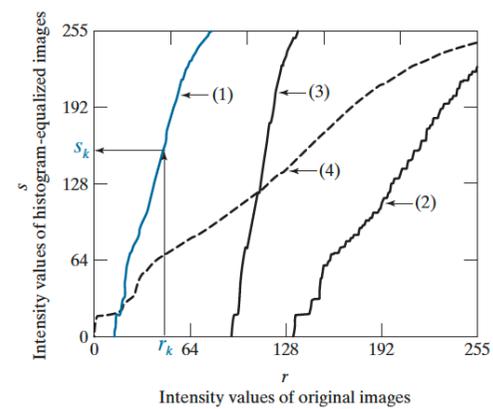
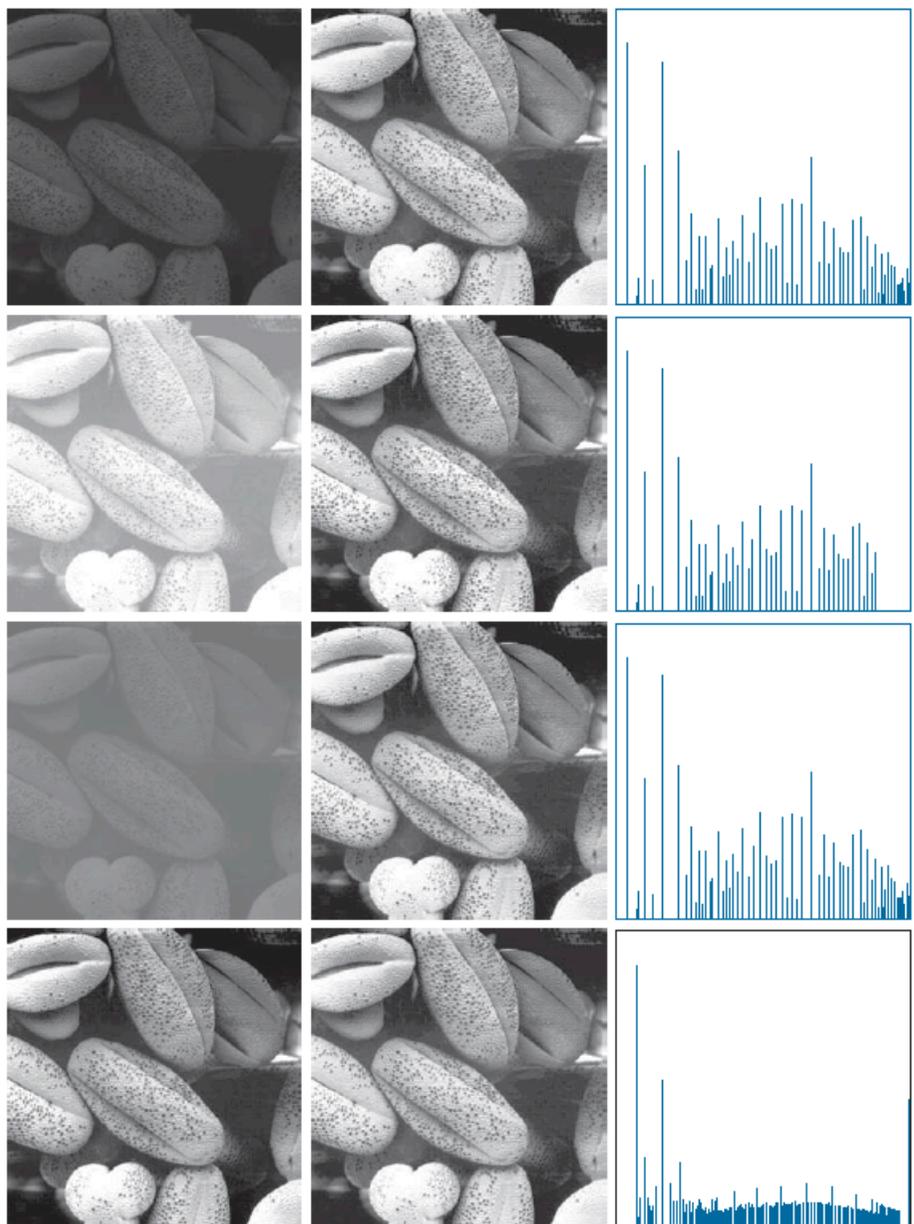
$$p_s(s) = p_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right| = p_r(r) \left| \frac{1}{(L - 1) p_r(r)} \right| = \frac{1}{L - 1}, \quad 0 \leq s \leq L - 1$$



a b

FIGURE 3.18 (a) An arbitrary PDF. (b) Result of applying the transformation in Eq. (3.3-4) to all intensity levels, r . The resulting intensities, s , have a uniform PDF, independently of the form of the PDF of the r 's.

直方图均衡





直方图匹配（直方图规定化）

□ 借助直方图变换实现规定/特定的灰度映射

□ 方法：

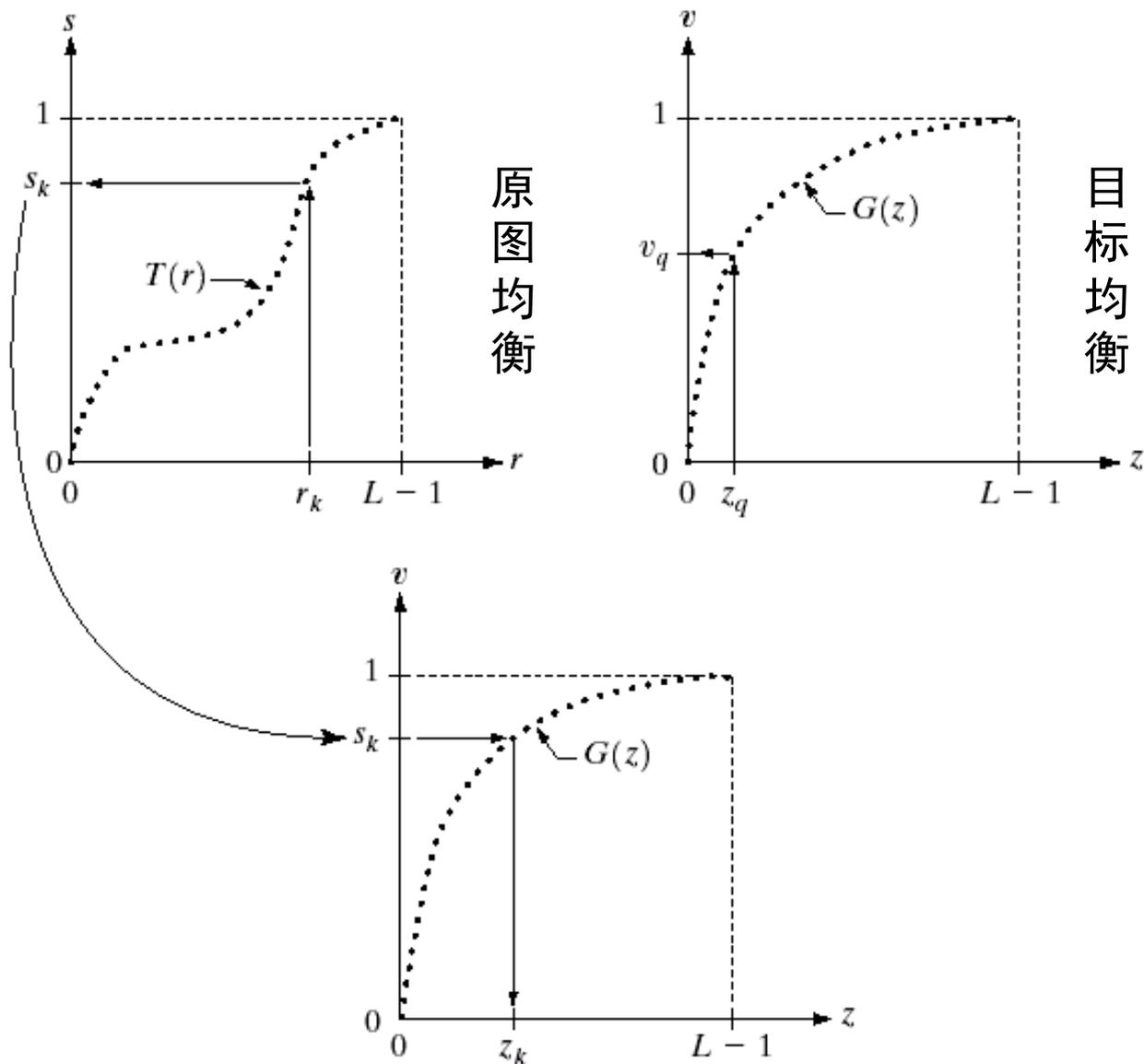
- 对原始直方图进行灰度均衡化
- 规定需要的直方图，计算能使规定直方图均衡化的变换
- 将原始直方图对应映射到规定直方图

直方图匹配 (直方图规定化)

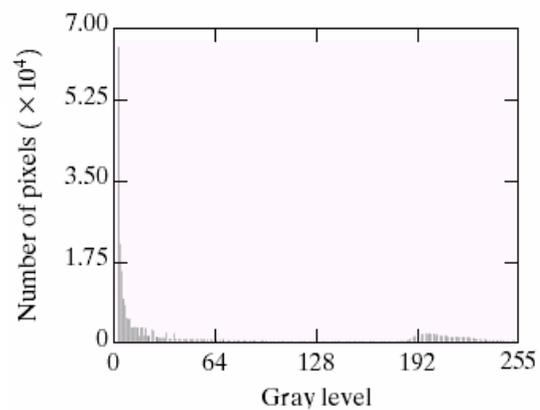
a b
c

FIGURE 3.19

(a) Graphical interpretation of mapping from r_k to s_k via $T(r)$.
 (b) Mapping of z_q to its corresponding value v_q via $G(z)$.
 (c) Inverse mapping from s_k to its corresponding value of z_k .

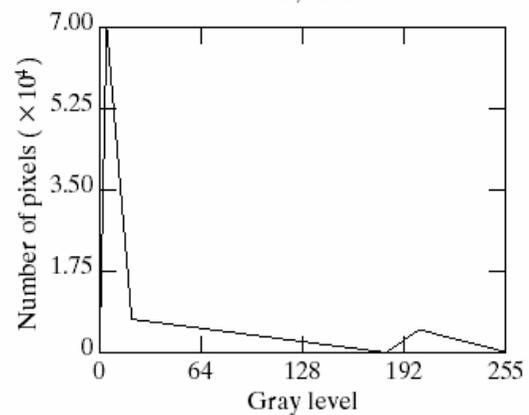


直方图匹配



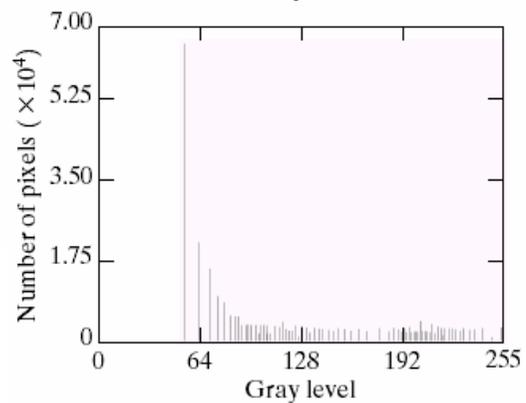
原图

原图
直方图



匹配目标
直方图

处理后
图像



处理后
直方图

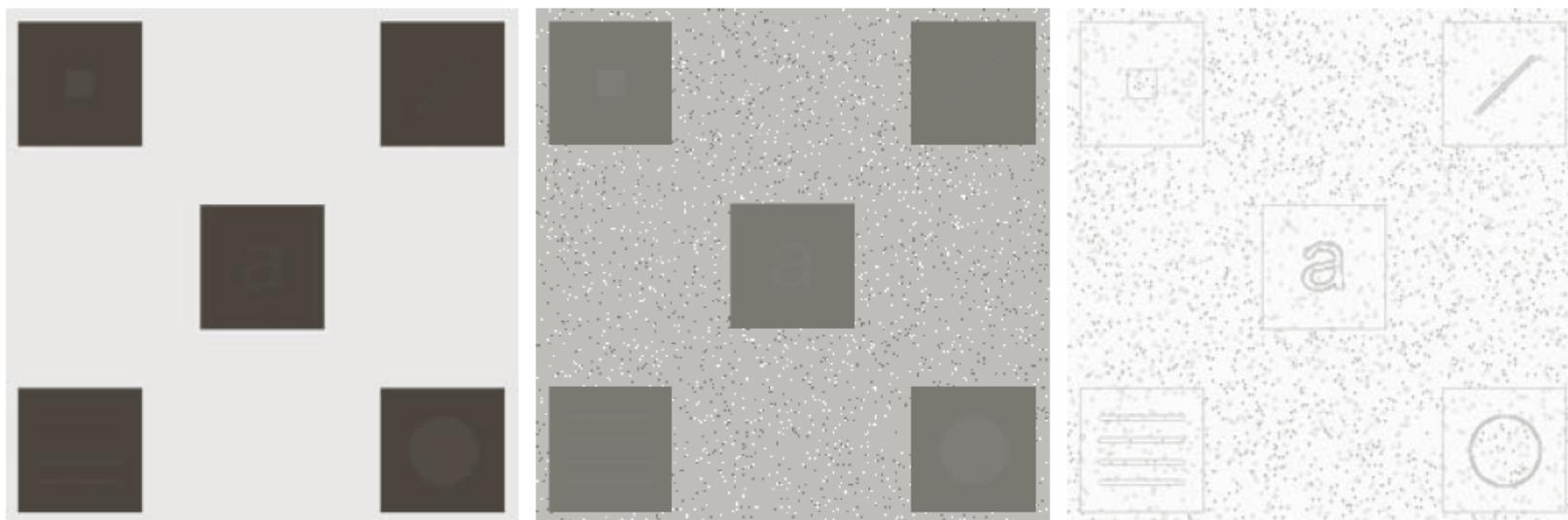


直方图均衡 vs. 直方图匹配

- 直方图均衡：
 - 自动增强
 - 效果不易控制
 - 总得到全图增强的结果
- 直方图匹配：
 - 有选择地增强
 - 须给定需要的直方图
 - 可特定增强的结果
- 直方图均衡可以看作是匹配直方图为**均匀分布**的直方图匹配

局部直方图处理

□ 图像局部邻域的直方图均衡化



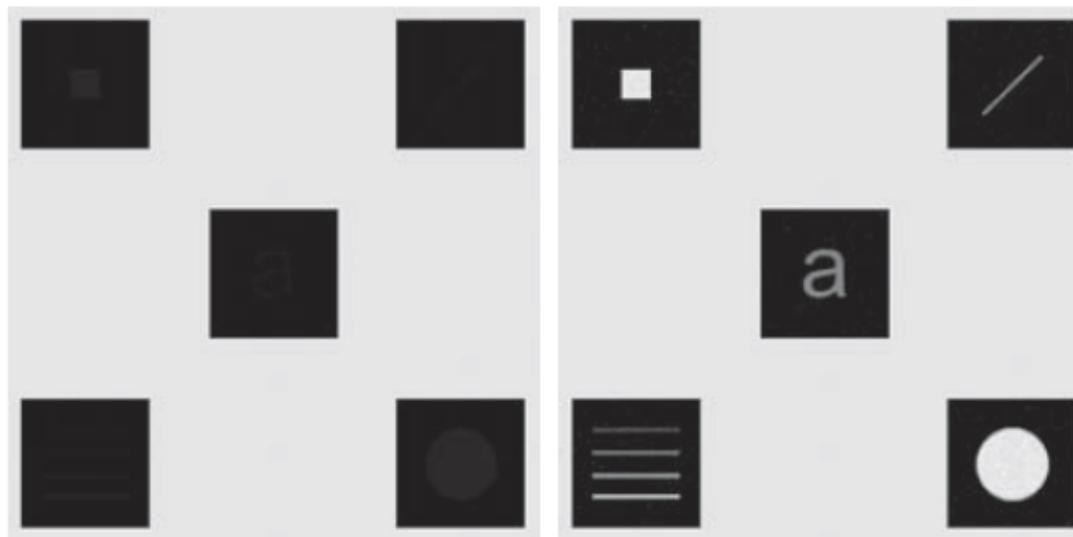
a b c

FIGURE 3.26 (a) Original image. (b) Result of global histogram equalization. (c) Result of local histogram equalization applied to (a), using a neighborhood of size 3×3 .

基于直方图统计的图像增强

- 基于图像的直方图，很容易计算出图像像素灰度的**均值**和**标准差**
- 基于像素邻域的**均值和标准差**，可以**选择性地**对某些像素灰度进行增强

a b
FIGURE 3.27
 (a) Original image. (b) Result of local enhancement based on local histogram statistics. Compare (b) with Fig. 3.26(c).



$$g(x, y) = \begin{cases} Cf(x, y) & \text{if } k_0m_G \leq m_{S_{xy}} \leq k_1m_G \text{ AND } k_2\sigma_G \leq \sigma_{S_{xy}} \leq k_3\sigma_G \\ f(x, y) & \text{otherwise} \end{cases}$$



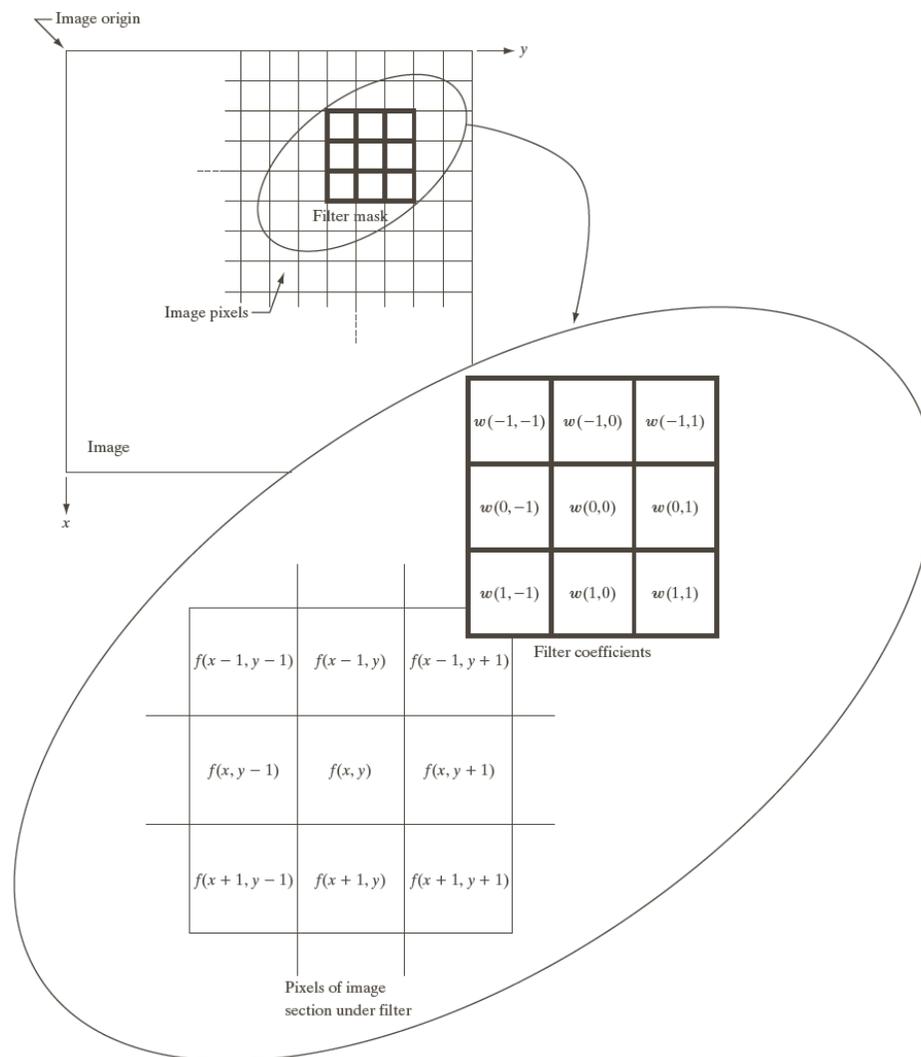
灰度变换与空域滤波

- 空间域灰度变换
 - 基本灰度变换
 - 直方图处理
- 空域滤波
 - 空间域滤波基础
 - 空域平滑
 - 空域锐化

空域滤波机制

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) \cdot f(x + s, y + t)$$

相关 vs. 卷积：卷积运算需要对卷积核进行反转操作，而相关不需要。



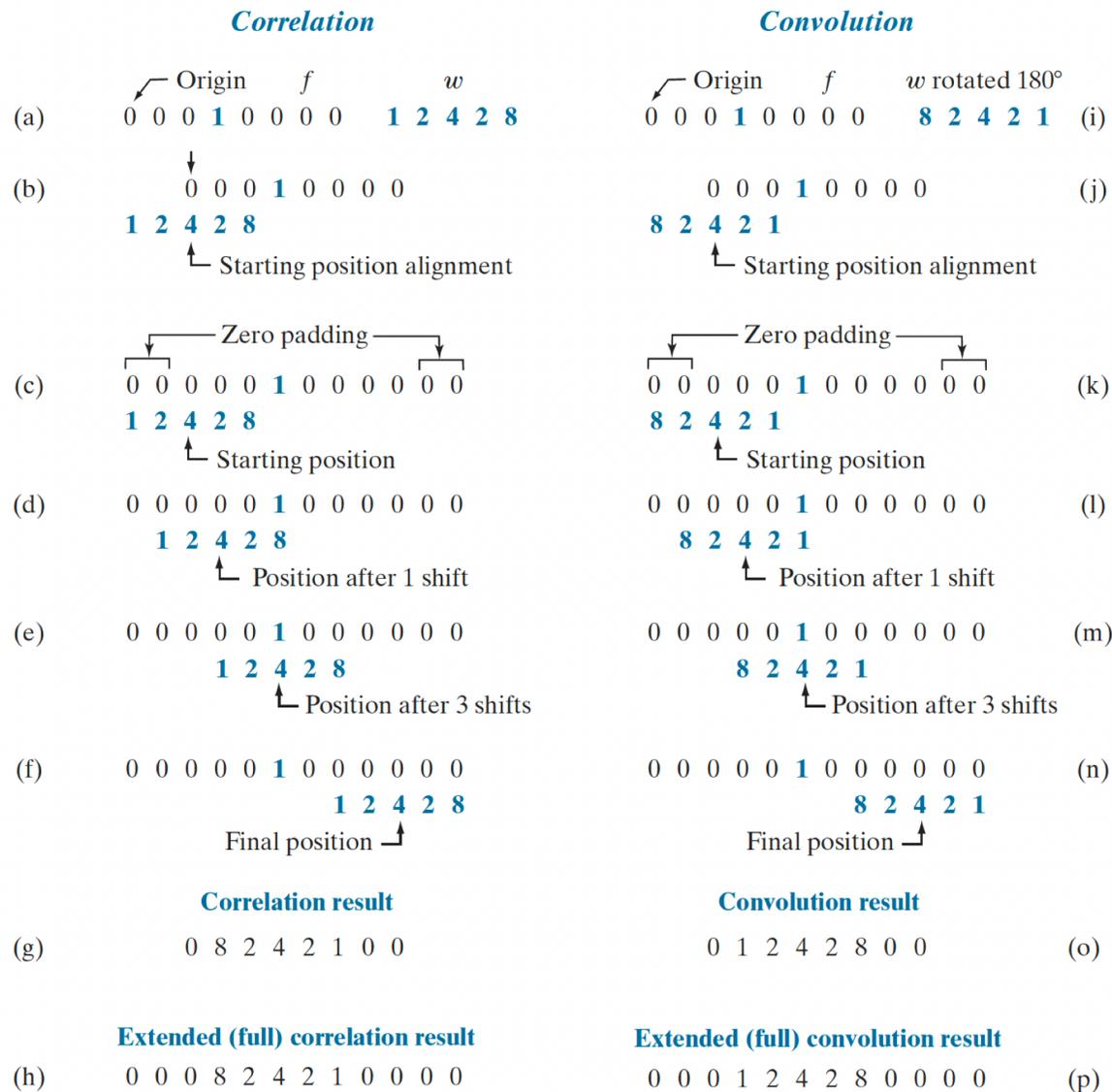


空间相关与卷积：一维情况

- 边界延拓:
- 1) 补零延拓
 - 2) 对称延拓
 - 3) 复制延拓
 - 4) 循环延拓

FIGURE 3.29

Illustration of 1-D correlation and convolution of a kernel, w , with a function f consisting of a discrete unit impulse. Note that correlation and convolution are functions of the variable x , which acts to *displace* one function with respect to the other. For the extended correlation and convolution results, the starting configuration places the right-most element of the kernel to be coincident with the origin of f . Additional padding must be used.

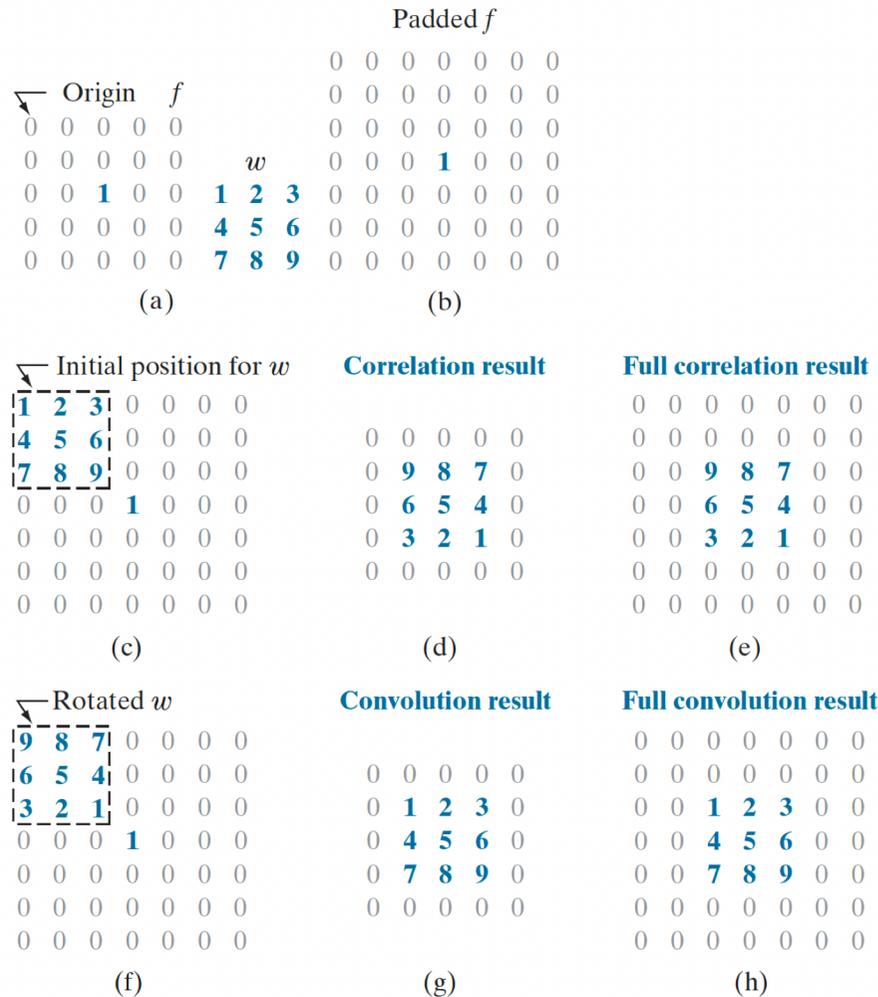




空间相关与卷积：二维情况

FIGURE 3.30

Correlation (middle row) and convolution (last row) of a 2-D kernel with an image consisting of a discrete unit impulse. The 0's are shown in gray to simplify visual analysis. Note that correlation and convolution are functions of x and y . As these variable change, they *displace* one function with respect to the other. See the discussion of Eqs. (3-36) and (3-37) regarding full correlation and convolution.



相关运算：

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)$$

卷积运算：

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x - s, y - t)$$



滤波器的向量表示与模板生成

- 当关注相关或卷积的响应特性时，可以将响应写为乘积的求和形式

$$R = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \cdots + w_{MN} z_{MN} = \mathbf{w}^T \mathbf{z}$$

- 等价于将二维滤波器按一维进行编号

- 空间滤波器的模板生成

- 滤波器的系数根据其支持怎么样的操作来选择
- **线性滤波**的作用是实现乘积求和操作：加权求和

$$w_{mn} = \frac{1}{MN} \quad w_{mn} = \exp\left(-\frac{\left(m - \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor\right)^2 + \left(n - \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor\right)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- **非线性滤波**要求确定邻域大小，以及对包含在邻域内的图像像素执行的操作



灰度变换与空域滤波

- 空间域灰度变换
 - 基本灰度变换
 - 直方图处理
- 空域滤波
 - 空间域滤波基础
 - 空域平滑
 - 空域锐化



平滑滤波器

□ 局部平均滤波器

- 局部平均滤波器用某象素邻域内的各点灰度的平均值来代替该象素原来的灰度值

$$g(x, y) = \frac{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)}{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t)}$$

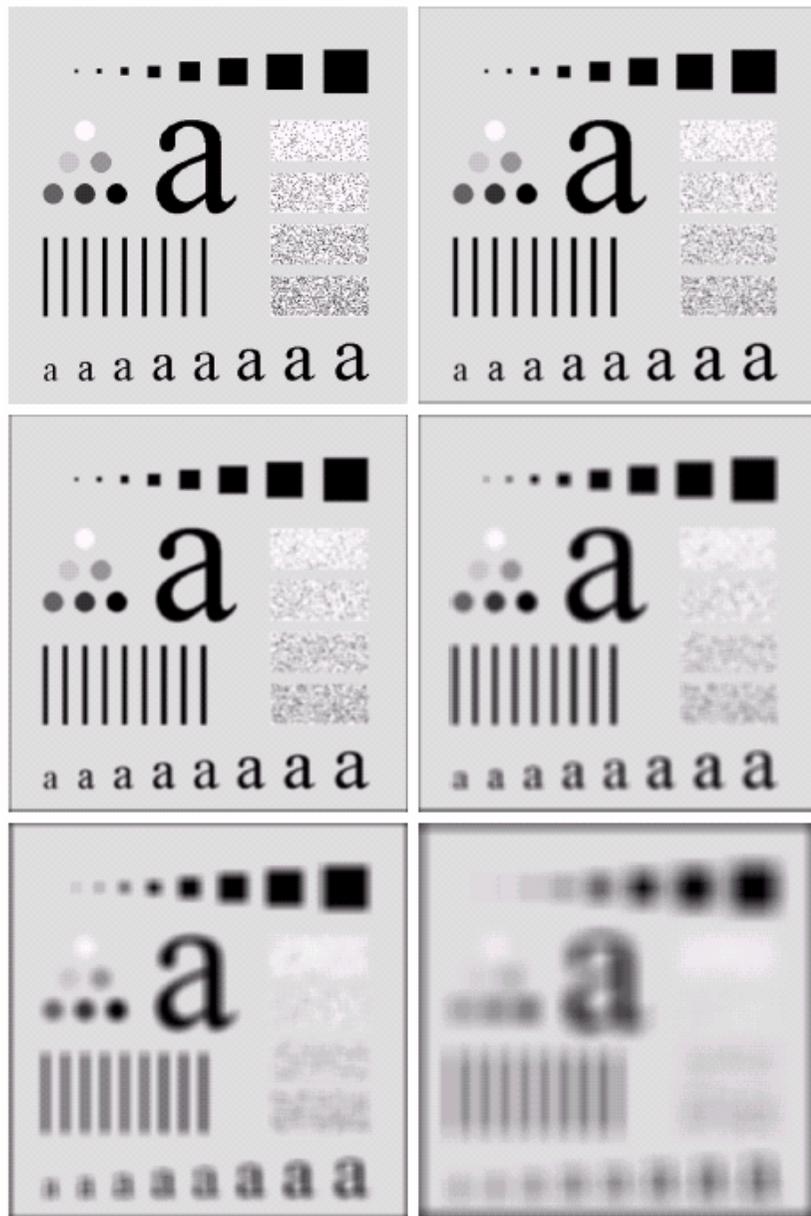
 $\frac{1}{9} \times$

1	1	1
1	1	1
1	1	1

 $\frac{1}{16} \times$

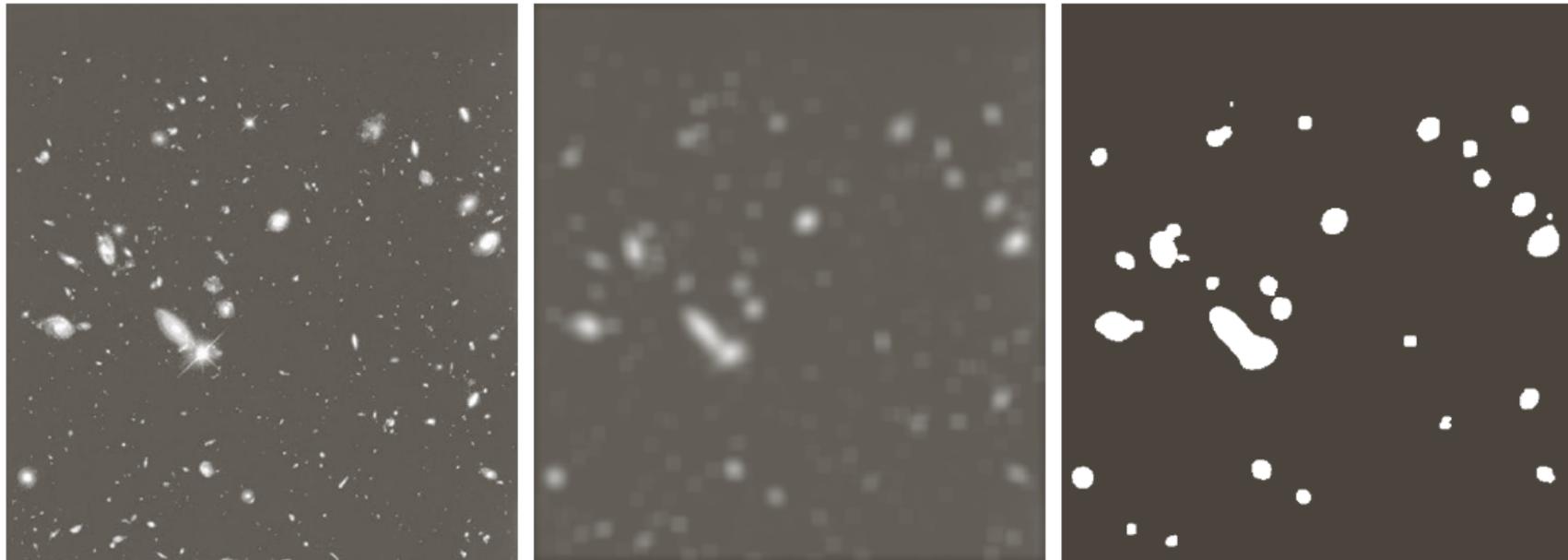
1	2	1
2	4	2
1	2	1

图像平滑



原图	n=3 方形均值滤波
n=5 方形均值滤波	n=9 方形均值滤波
n=15 方形均值滤波	n=35 方形均值滤波

图像平滑



a b c

FIGURE 3.34 (a) Image of size 528×485 pixels from the Hubble Space Telescope. (b) Image filtered with a 15×15 averaging mask. (c) Result of thresholding (b). (Original image courtesy of NASA.)



统计排序滤波器

□ 中值滤波

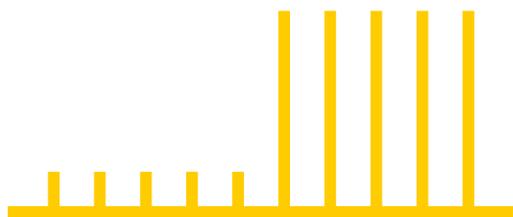
- 用局部邻域（窗口）里的中值来代替上述局部平均法中的局部平均值。即将以该点为中心的某个窗口框住的各象素的中间值作为处理后图象中该点象素的值。
- 二维中值滤波的概念是一维的推广
- 以一维为例：
 - ✓ 奇数窗口中五点的值为 88、95、230、110、120，按大小重排这五个值得 88、95、110、120、230，其位于中间位置上的“中值”是110。
 - ✓ 实际应用：家庭收入统计（中位数）

□ 其他统计排序滤波器

- 最大值滤波器，最小值滤波器



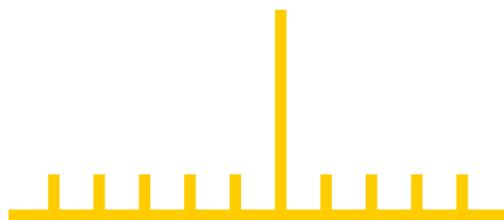
中值滤波保留边缘的性能



阶跃信号

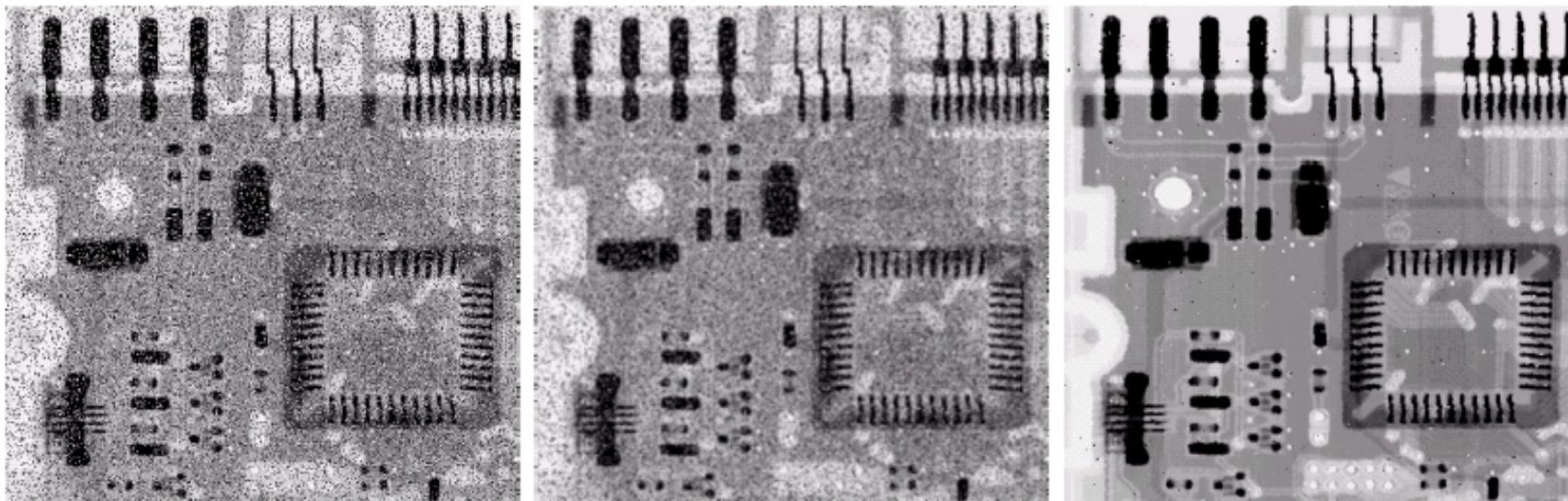


脉冲信号



噪声

中值滤波



椒盐噪声污染的
电路板X光图像

3*3均值掩模去除噪声

3*3中值滤波器去除噪声

去除椒盐噪声使用自适应中值滤波器的效果会更好一些，
详情参见《数字图像处理》（冈萨雷斯）



保边滤波器

- 在滤波过程中能尽可能保留图像中的边缘信息，同时达到平滑的目的
- 保边滤波器在图像不同位置的权重将不再一致，以此达到在图像平缓区域进行平滑，同时在图像边缘区域保留边缘信息的目的。

$$g(x, y) = \frac{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)}{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t)}$$



$$g(x, y) = \frac{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) f(x + s, y + t)}{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t, \mathbf{x}, \mathbf{y})}$$

- 代表性方法
 - 双边滤波，导向滤波



双边滤波器

□ 顾名思义，双边滤波器同时考虑滤波过程中由两方面因素带来的影响

- 像素相对位置的影响：距离越远，对应权重越小

$$w_d(s, t) = \exp\left(-\frac{s^2 + t^2}{2\sigma_d^2}\right)$$

- 像素值的影响：相差越小，越不可能为边缘，对应权重越大

$$w_r(s, t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp\left(-\frac{\|f(x, y) - f(x + s, y + t)\|^2}{2\sigma_r^2}\right)$$

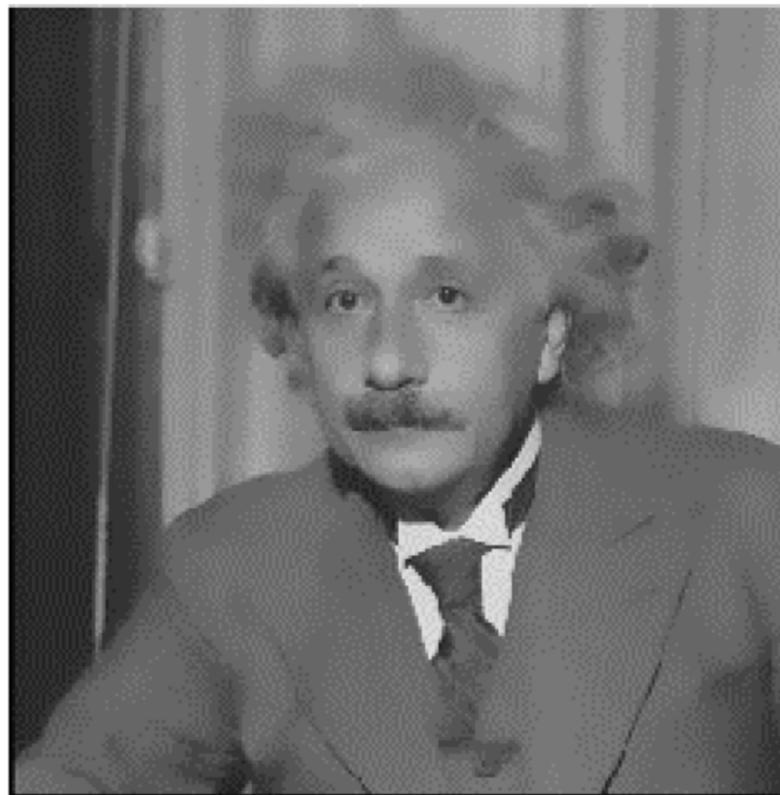
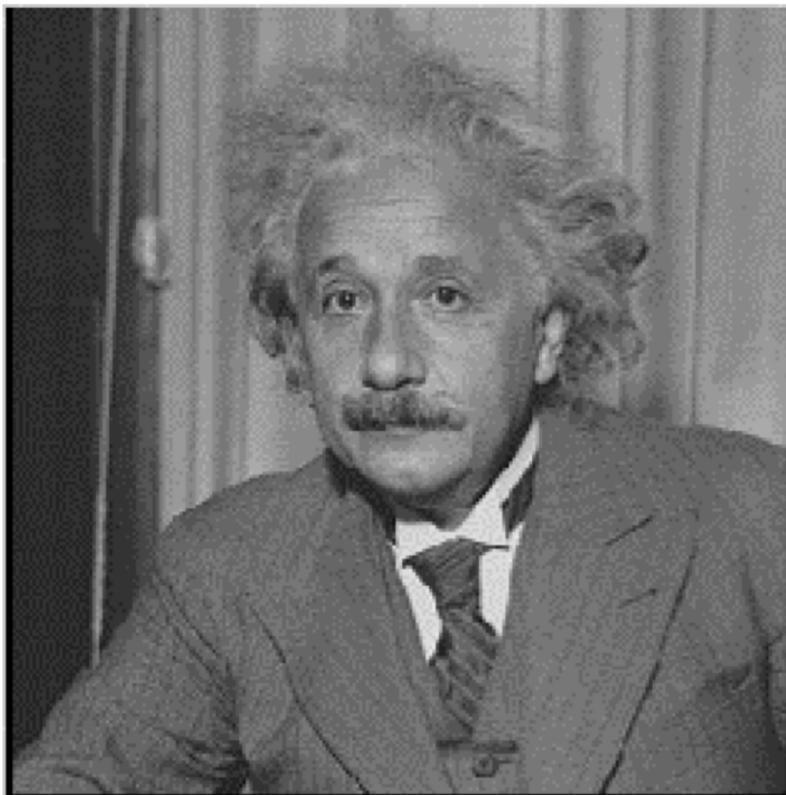
- 双边滤波器的权重将由两部分权重共同决定：

$$\begin{aligned} w(s, t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= w_d(s, t) * w_r(s, t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \exp\left(-\frac{s^2 + t^2}{2\sigma_d^2} - \frac{\|f(x, y) - f(x + s, y + t)\|^2}{2\sigma_r^2}\right) \end{aligned}$$



双边滤波器

□ 双边滤波器的滤波效果





导向滤波

□ 利用**引导图像**对图像滤波进行指导

输入：待滤波图像 p ，引导图像 I

我们定义一个这样的滤波过程：

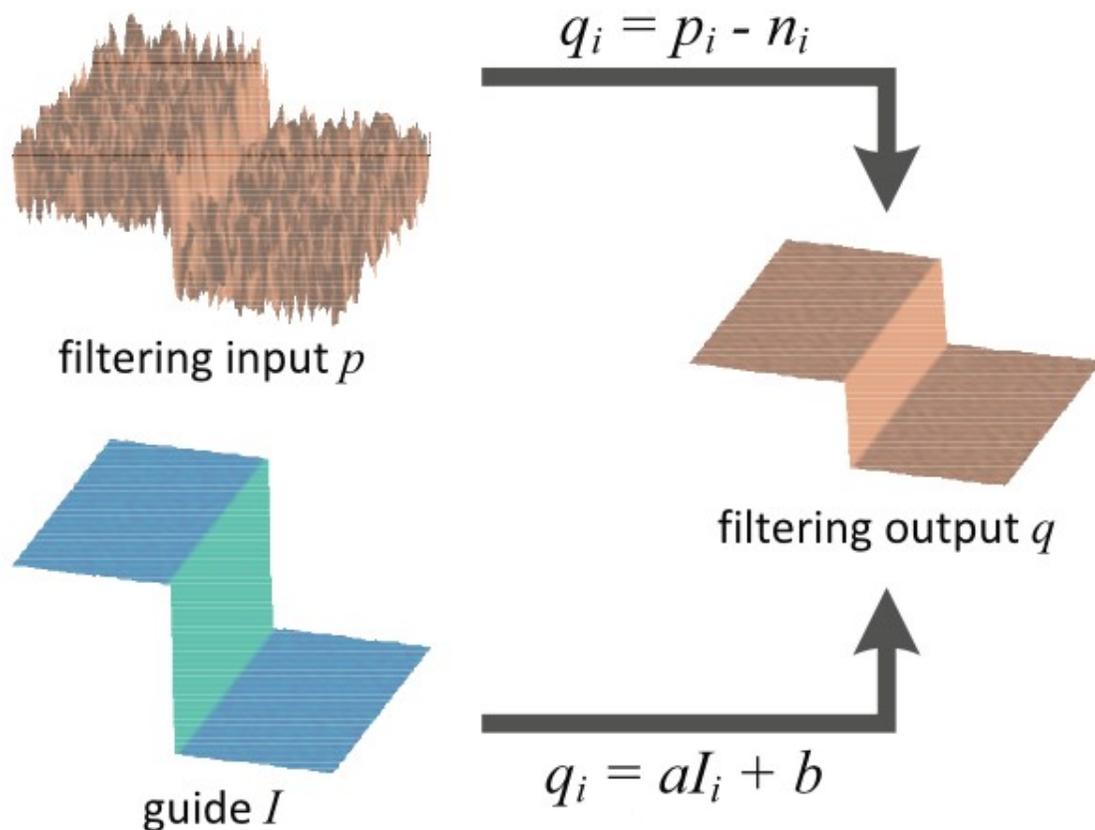
$$q_i = \sum_{j \in \omega_i} W_{ij}(I) p_j$$

其中 q 为滤波器输出，

i, j 为像素下标，

W_{ij} 是一个只和引导图像相关的**线性**滤波核

导向滤波



我们假设输出图像在一个窗口 w_k 内与引导图像有局部线性关系:

$$q_i = a_k I_i + b_k, \forall i \in w_k$$

对等式求导, 我们可以看到输出图像的边沿可以得到保留:

$$\nabla q = a \nabla I$$

我们的输出图像则应为输入图像去除图中的噪声 n :

$$q_i = p_i - n_i$$

对于每一个滤波窗口, 我们的目标就是最小化这个噪声:

$$\operatorname{argmin} \sum_{i \in w_k} (q_i - p_i)^2$$



导向滤波

我们引入一个正则化参数 ε 避免 a_k 过大:

$$E(a_k, b_k) = \sum_{i \in w_k} ((a_k I_i + b_k - p_i)^2 + \varepsilon a_k^2)$$

对参数求偏导并令其为零，解得:

$$a_k = \frac{\frac{1}{|w|} \sum_{i \in w_k} I_i p_i - \mu_k \bar{p}_k}{\sigma_k^2 + \varepsilon}, \quad b_k = \bar{p}_k - a_k \mu_k$$

其中 μ_k , σ_k^2 表示引导图像 I 在窗口 w_k 中的均值和方差, $|w|$ 表示窗口中像素的个数, \bar{p}_k 是输入图像 p 在窗口中的平均值。

由于每一个像素都处于多个窗口中, 我们将得到的所有结果取平均, 由此得到最后的结果:

$$q_i = \frac{1}{|w|} \sum_{k: i \in w_k} (a_k I_i + b_k) = \bar{a}_k I_i + \bar{b}_k$$



导向滤波

- 导向滤波的一个常用场景即将输入图像作为引导图像，此时方程的解变化为：

$$a_k = \frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2 + \varepsilon} \quad b_k = (1 - a_k)\bar{p}_k$$

- 在平坦区域，方差较小，此时 $a_k \approx 0, b_k \approx \bar{p}_k$ ，相当于对该区域做均值滤波
- 在边缘区域，方差较大，此时 $a_k \approx 1, b_k \approx 0$ ，相当于在该区域保持原有图像



灰度变换与空域滤波

- 空间域灰度变换
 - 基本灰度变换
 - 直方图处理
- 空域滤波
 - 空间域滤波基础
 - 空域平滑
 - 空域锐化



空域锐化

- 图象锐化针对常见的图像模糊、边缘不清晰所采取的处理方法，它能加强图象的轮廓，使图象看起来比较清楚

- 锐化处理的主要目的：突出灰度的过渡部分
 - 常用一阶微分和二阶微分的锐化滤波器

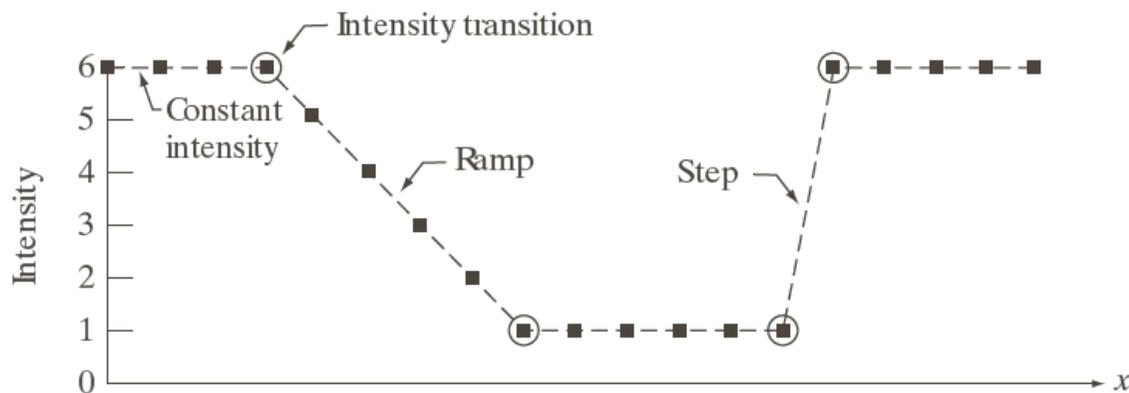
$$\frac{\partial f}{\partial x} = f(x + 1) - f(x) \quad (\text{前向差分})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f(x) - f(x - 1) \quad (\text{后向差分})$$

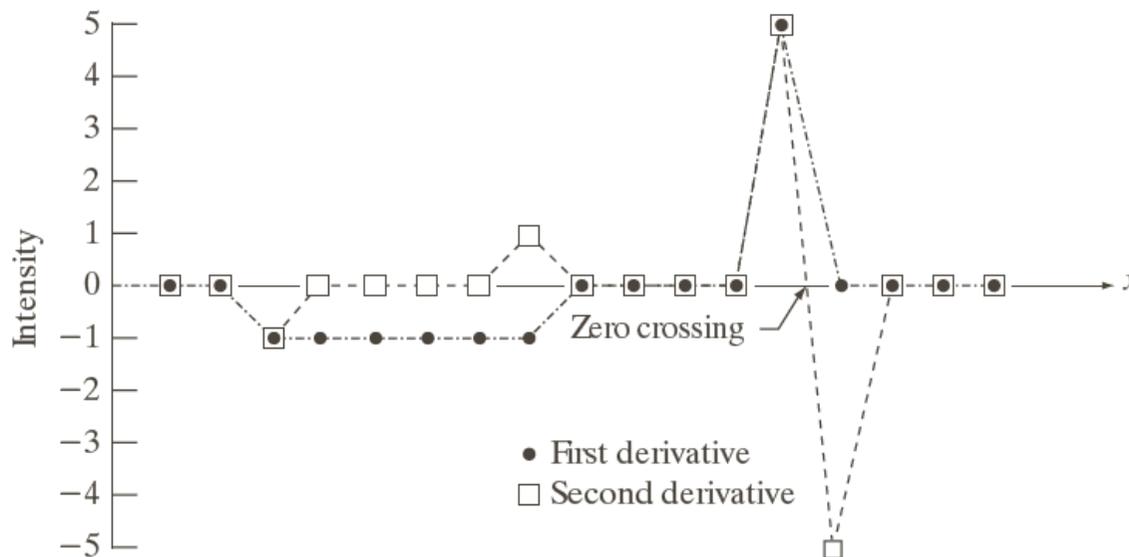
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0.5 \cdot [f(x + 1) - f(x - 1)] \quad (\text{中心差分})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x + 1) + f(x - 1) - 2f(x)$$

空域锐化



Scan line	6	6	6	6	5	4	3	2	1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6
1st derivative	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0
2nd derivative	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	5	-5	0	0	0	0



a
b
c

FIGURE 3.36

Illustration of the first and second derivatives of a 1-D digital function representing a section of a horizontal intensity profile from an image. In (a) and (c) data points are joined by dashed lines as a visualization aid.



一阶微分锐化图像

- 分析表明微分可以突出高频成分，从而使图象轮廓清晰。因此在空间域可用微分法锐化图象
- 图象处理中常用的微分方法是“梯度法”，即用梯度作为锐化图象的度量。对于数字图象，则用差分来表示梯度。
- 实际应用中，为了获得各向同性的度量，用梯度的模代替梯度



一阶微分锐化图像

□ 典型的差分运算:

$$G[f(x, y)] = |f(x, y) - f(x - 1, y)| + |f(x, y) - f(x, y - 1)|$$

"

0	0
-1	1

0	-1
0	1

直接差分算子"



梯度算子

- Roberts算子
- Sobel算子
- Prewitt算子
- Kirsch算子

-1	0
0	1

0	-1
1	0

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

-1	-1	-1
0	0	0
1	1	1

-1	0	1
-1	0	1
-1	0	1

5	5	5
-3	0	-3
-3	-3	-3

-3	5	5
-3	0	5
-3	-3	-3



梯度算子

原始图像



$|G_y|$



$|G_x|$



$|G_x| + |G_y|$



梯度算子

□ Sobel算子

- 微分算子对图像噪声敏感，低通滤波可抑制噪声
- Sobel算子（垂直方向）：等价于先在图像水平的方向上进行低通滤波，然后在垂直的方向上做中心差分

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

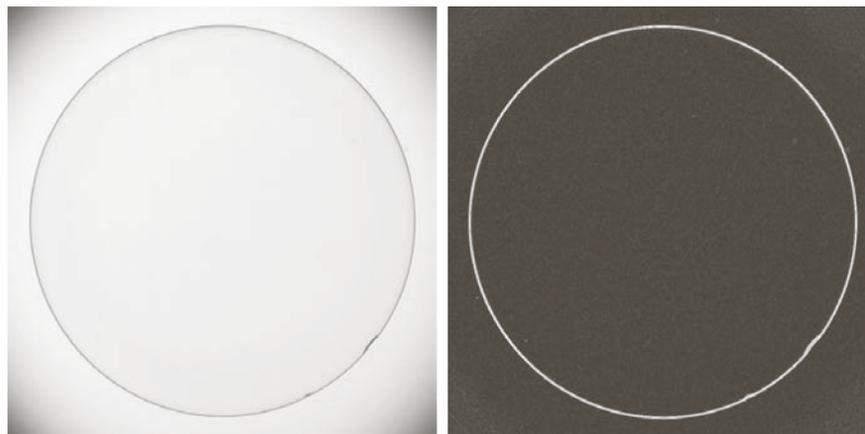
Sobel算子（垂直方向）

0	0	0
1	2	1
0	0	0

低通滤波

0	-1	0
0	0	0
0	1	0

中心差分



a b

FIGURE 3.42
 (a) Optical image of contact lens (note defects on the boundary at 4 and 5 o'clock).
 (b) Sobel gradient.
 (Original image courtesy of Pete Sites, Perceptics Corporation.)



拉普拉斯算子

□ 一个二元图像函数 $f(x, y)$ 的拉普拉斯变换定义为:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

□ 几种常用的拉普拉斯算子:

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

1	1	1
1	-8	1
1	1	1

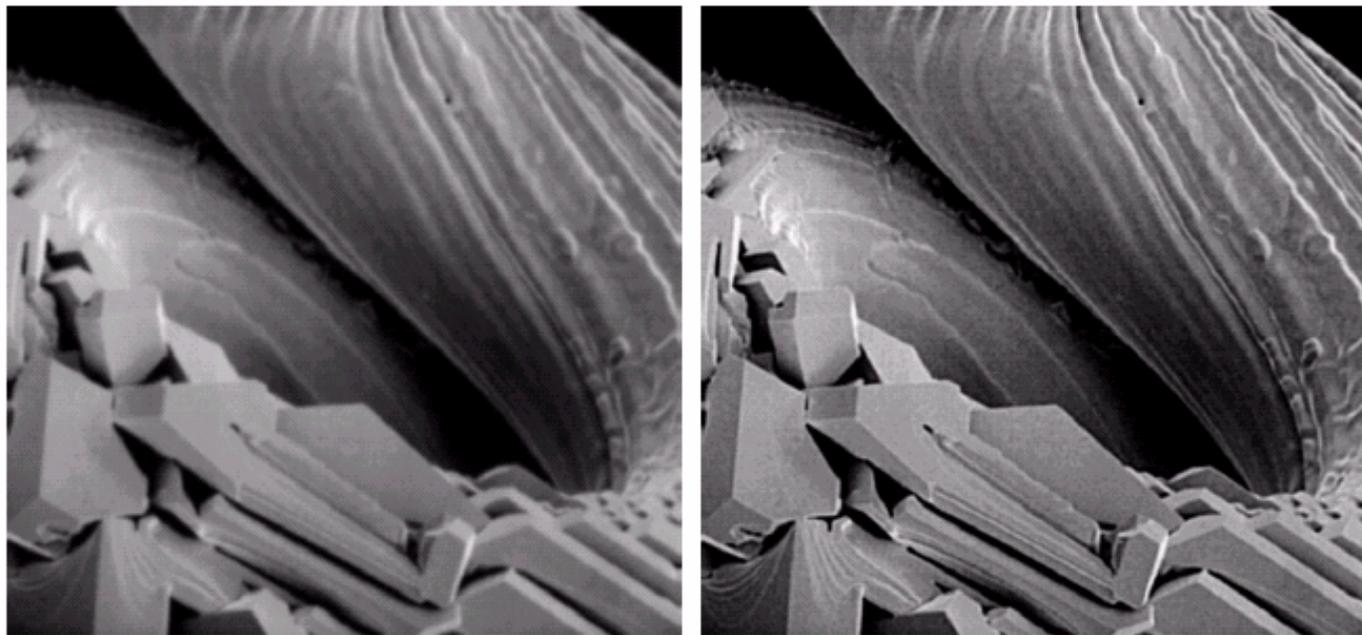
0	-1	0
-1	4	-1
0	-1	0

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1

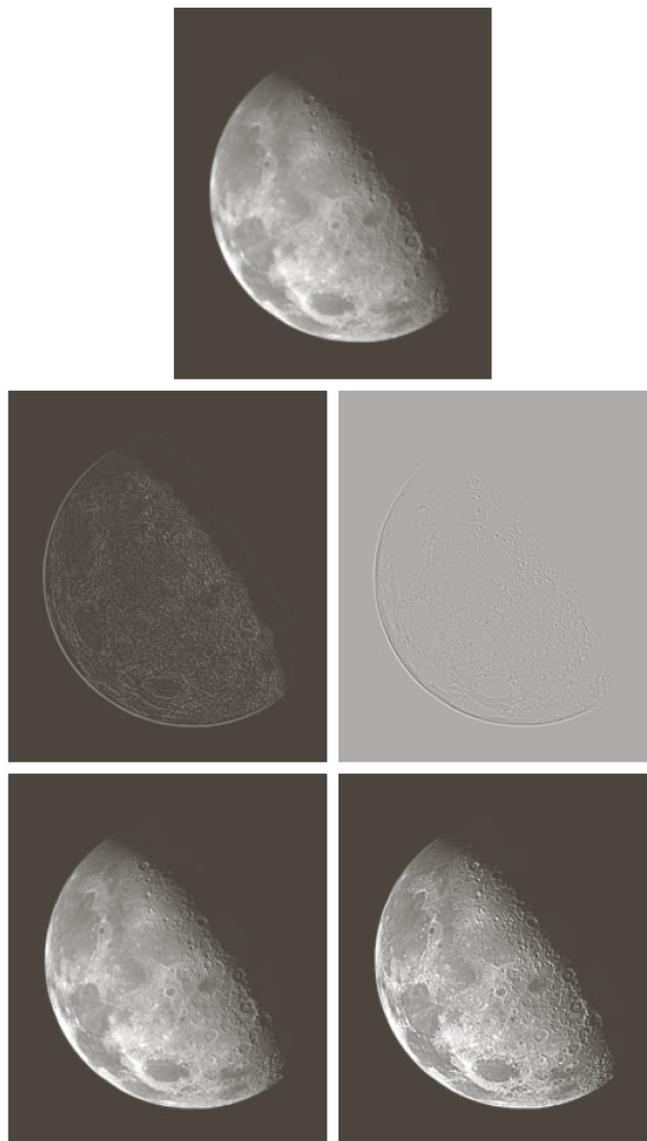
使用拉普拉斯算子进行图像增强



$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) - \nabla^2 f(x, y) & \text{如果拉普拉斯掩模中心系数为负} \\ f(x, y) + \nabla^2 f(x, y) & \text{如果拉普拉斯掩模中心系数为正} \end{cases}$$



使用拉普拉斯算子进行图像增强



a	
b	c
d	e

FIGURE 3.38

(a) Blurred image of the North Pole of the moon.

(b) Laplacian without scaling.

(c) Laplacian with scaling. (d) Image sharpened using the mask in Fig. 3.37(a).

(e) Result of using the mask in Fig. 3.37(b).

(Original image courtesy of NASA.)



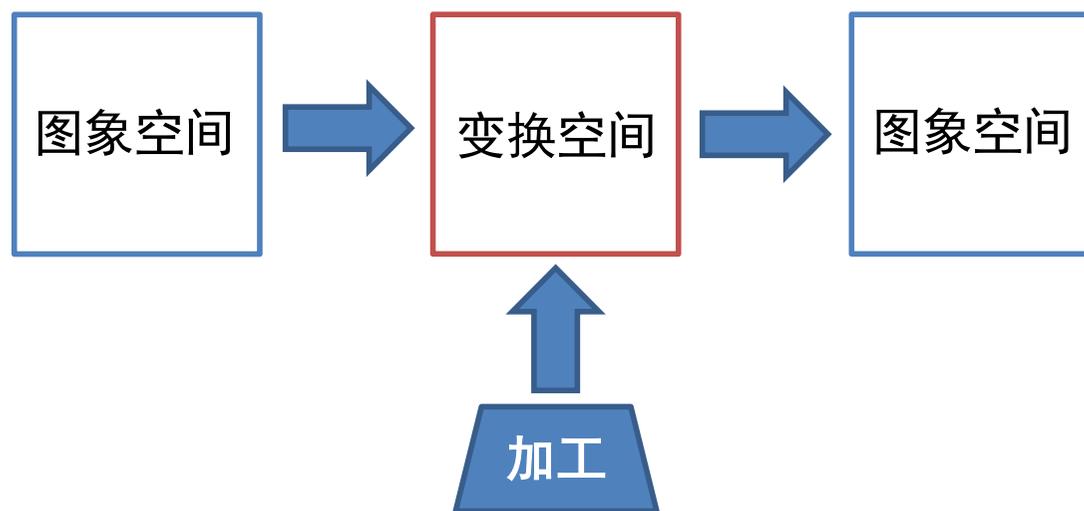
图像增强

- 什么是图像增强？
- 灰度变换与空域滤波
- 图像频域滤波



图像的频率域滤波

- 为了有效和快速地对图象进行处理，常常需要将原定义在图象空间的图象以某种形式转换到另外一些空间（频率域空间）并加工，最后再转换回图象空间以得到所需的效果。





图像频域滤波

□ 背景知识

- 离散傅里叶变换 (DFT)
- 频率域滤波基础

□ 图像的频域滤波

- 频率域滤波器平滑图像
- 频率域滤波器锐化图像



傅里叶变换基础

□ 一维傅里叶变换及其反变换：

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux} dx$$
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{j2\pi ux} du$$

□ 离散形式：

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x)e^{-\frac{j2\pi ux}{M}}, x = 0, 1, 2, \dots, M-1$$
$$f(x) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u)e^{\frac{j2\pi ux}{M}}, u = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

□ 频域的极坐标表示：

$$F(u) = |F(u)|e^{-j\phi(u)}$$
$$|F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{\frac{1}{2}}, \quad \phi(u) = \arctan\left[\frac{I(u)}{R(u)}\right]$$



离散傅立叶变换(DFT)

二维DFT及其反变换

$$F(u, v) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$
$$u = 0, 1, 2, \dots, M-1$$
$$v = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

功率谱:

$$P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} f(u, v) e^{j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$
$$x = 0, 1, 2, \dots, M-1$$
$$y = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

可以证明:

$$\text{DFT}[f(x, y)(-1)^{x+y}] = F(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2})$$

即将原始图像乘以 $(-1)^{x+y}$ 可以将傅里叶变换的原点移到 $(\frac{M}{2}, \frac{N}{2})$ 上

幅度 (傅里叶谱或频谱) : $|F(u, v)| = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{\frac{1}{2}}$

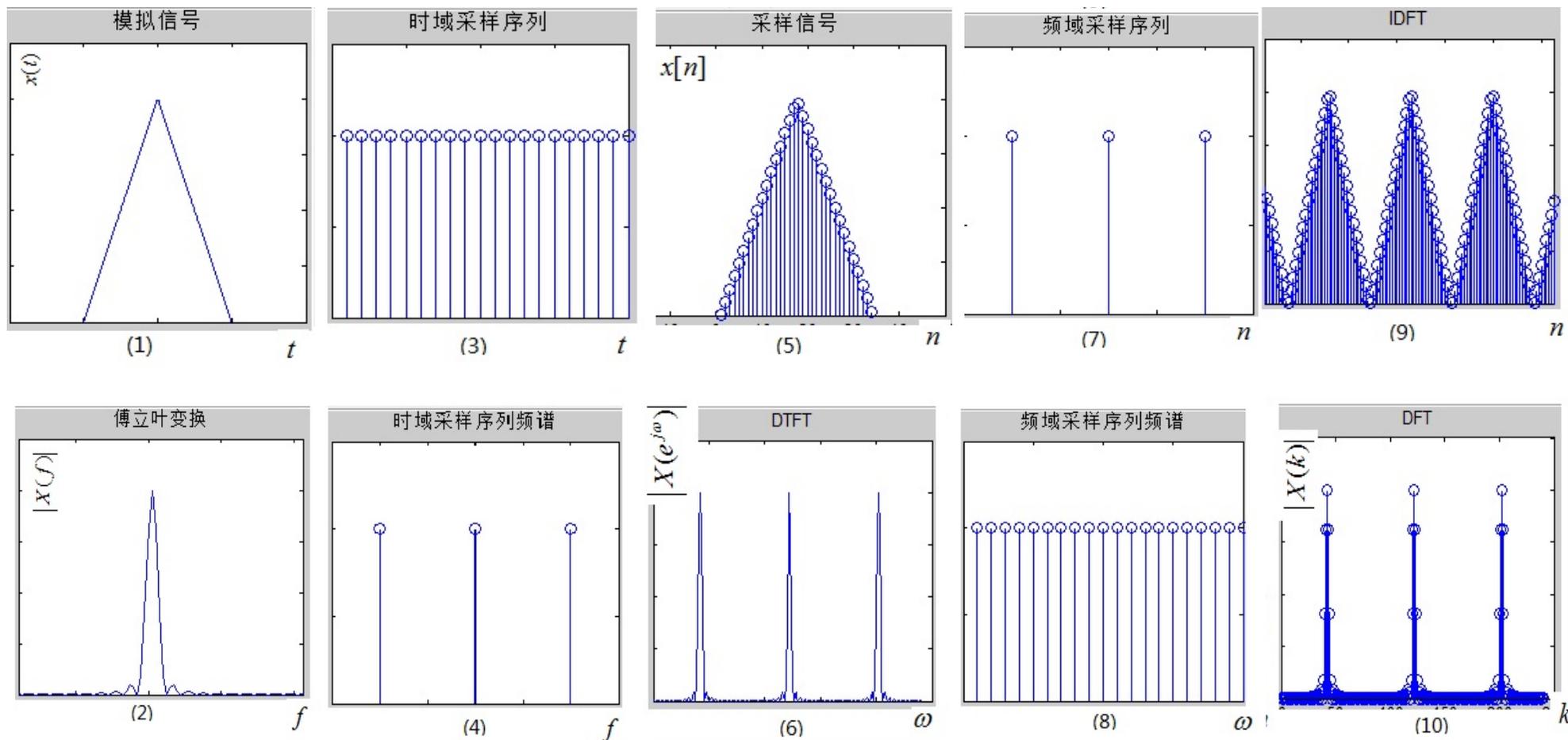
相位: $\phi(u, v) = \arctan[\frac{I(u, v)}{R(u, v)}]$

直流分量: $F(0, 0) = MN \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) = MN\bar{f}$, 其中 \bar{f} 为图像的平均灰度



傅立叶变换基础

- 傅里叶变换（FT）、离散时间傅里叶变换（DTFT）和离散傅里叶变换（DFT）之间的关系
 - DFT：对一个周期取样





图像频域滤波

□ 背景知识

- 离散傅里叶变换 (DFT)
- 频率域滤波基础

□ 图像的频域滤波

- 频率域滤波器平滑图像
- 频率域滤波器锐化图像

频率域滤波基础

频率域滤波的基本步骤:

1. 乘以 $(-1)^{x+y}$
2. $F(u, v)$
3. $H(u, v) \times F(u, v)$
4. IDFT
5. 取实部
6. 乘以 $(-1)^{x+y}$

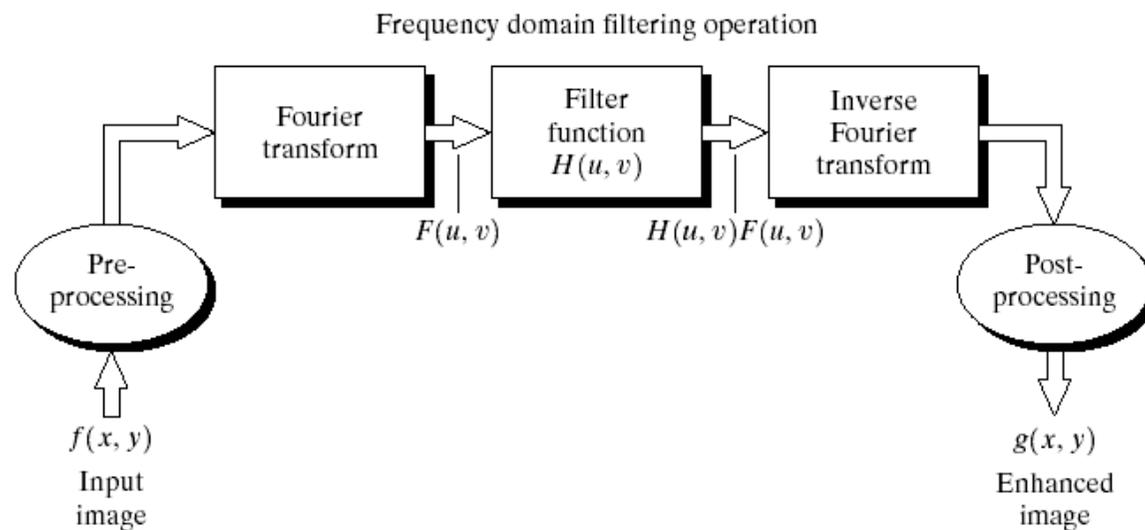


FIGURE 4.5 Basic steps for filtering in the frequency domain.

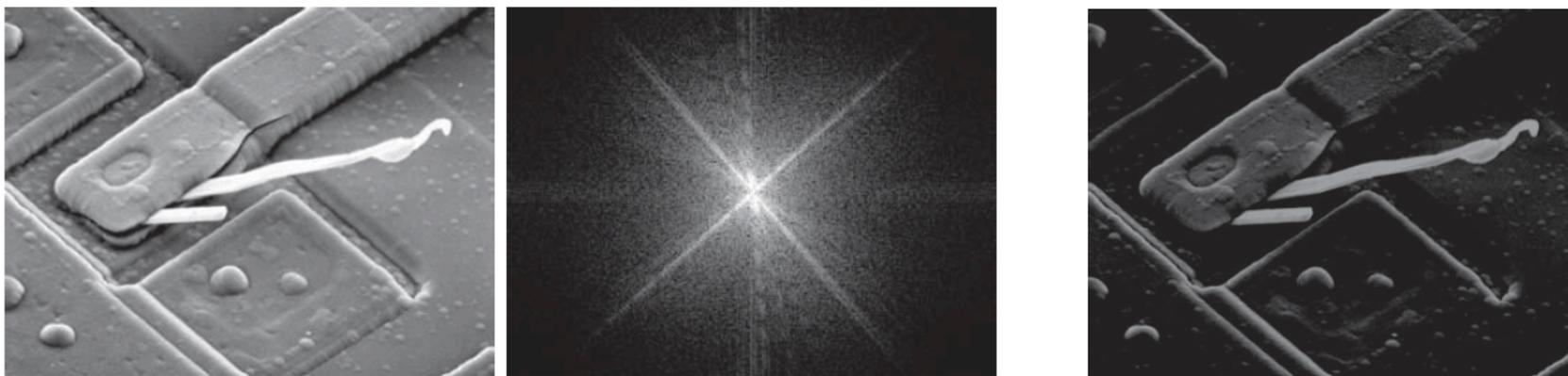
$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$
$$g(x, y) = IDFT[H(u, v)F(u, v)]$$

频率域滤波基础

一些基本的滤波器及其性质：

陷波滤波器：利用 $F(0,0)$ 为灰度平均值（直流分量）

使图像平均灰度为0：
$$H(u, v) = \begin{cases} 0, & (u, v) = \left(\frac{M}{2}, \frac{N}{2}\right) \\ 1 & \text{其他} \end{cases}$$



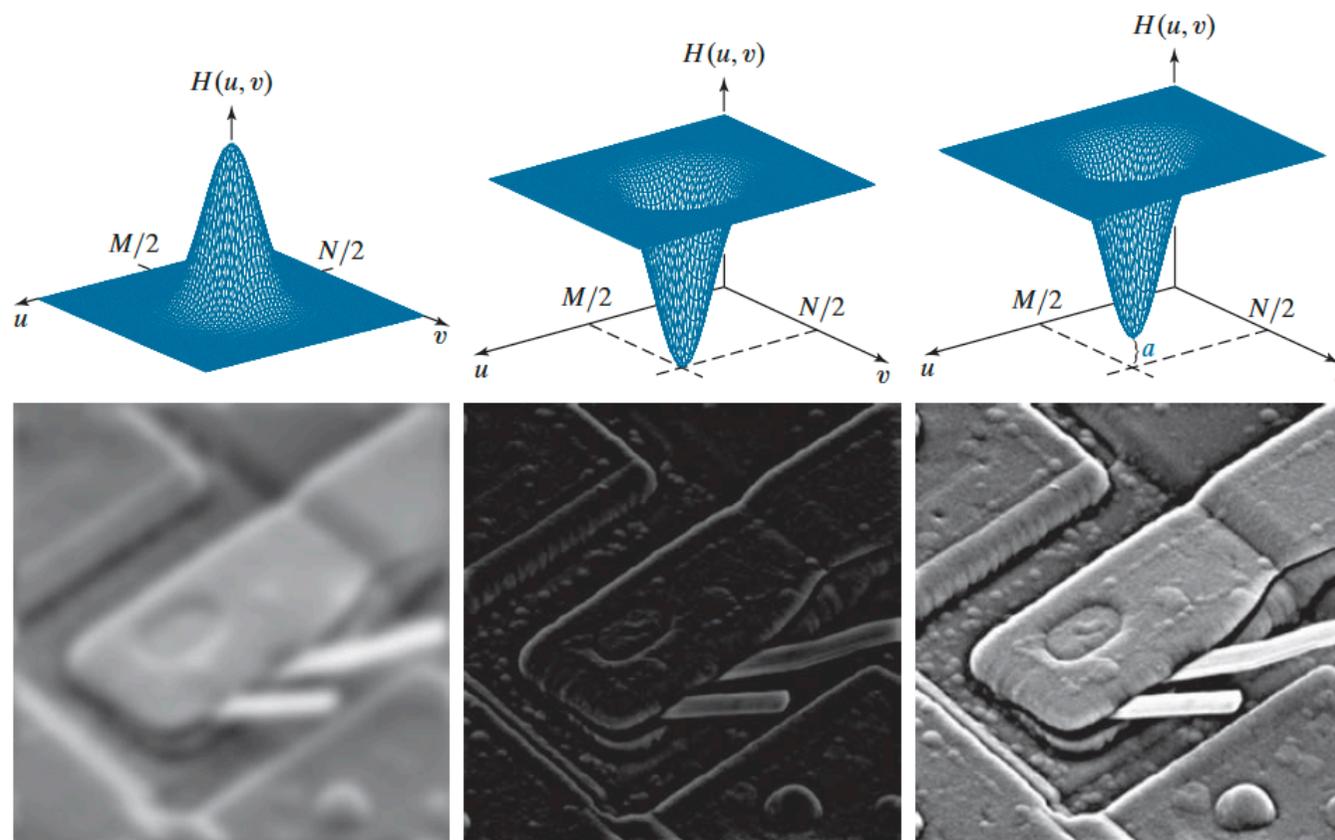
a b

FIGURE 4.28 (a) SEM image of a damaged integrated circuit. (b) Fourier spectrum of (a). (Original image courtesy of Dr. J. M. Hudak, Brockhouse Institute for Materials Research, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada.)

FIGURE 4.29 Result of filtering the image in Fig. 4.28(a) with a filter transfer function that sets to 0 the dc term, $F(P/2, Q/2)$, in the centered Fourier transform, while leaving all other transform terms unchanged.

频率域滤波基础

□ 高通与低通滤波



a	b	c
d	e	f

FIGURE 4.30 Top row: Frequency domain filter transfer functions of (a) a lowpass filter, (b) a highpass filter, and (c) an offset highpass filter. Bottom row: Corresponding filtered images obtained using Eq. (4-104). The offset in (c) is $a = 0.85$, and the height of $H(u, v)$ is 1. Compare (f) with Fig. 4.28(a).



空间和频率域滤波间的对应

□ 基本联系为卷积定理

离散情况下：

$$f(x, y) * h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x - m, y - n)$$

$$f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v)$$

$$f(x, y)h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * H(u, v)$$

空间域卷积对应频率域乘法，空间域乘法对应频率域卷积



空间和频率域滤波间的对应

定义单位冲激函数 $\delta(x, y) = \begin{cases} 1, x = y = 0 \\ 0, \text{其他情况} \end{cases}$

单位冲激函数的傅氏变换：

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \delta(x, y) e^{-2\pi i (\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} = 1$$

令 $f(x, y) = \delta(x, y)$ ，则有：

$$\text{空域上： } f(x, y) * h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \delta(m, n) h(x - m, y - n) = h(x, y)$$

$$\text{频域上： } f(x, y) * h(x, y) \rightarrow F(u, v)H(u, v) = H(u, v)$$

空间域和频率域上的滤波器组成了一个傅里叶变换对

空间和频率域滤波间的对应

空间域滤波和频率域滤波之间的对应关系

例如：高斯滤波函数

$$H(u) = Ae^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$$

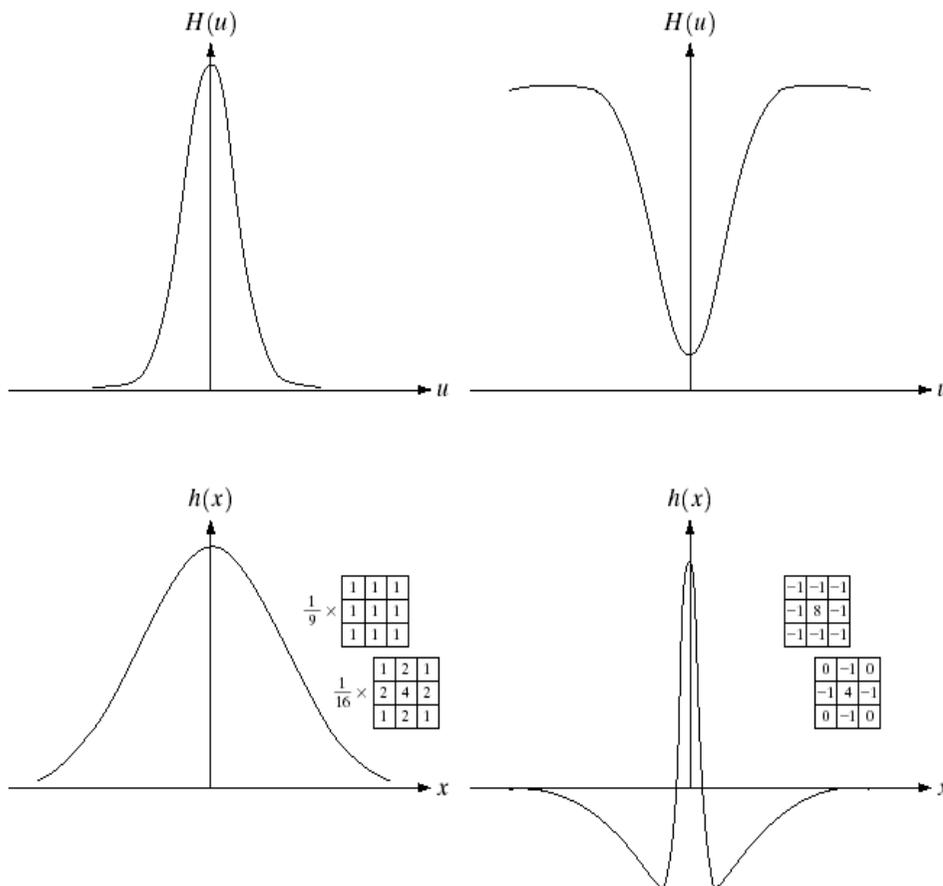
σ 为标准差

对应傅里叶反变换：

$$h(x) = \sqrt{2\pi}\sigma Ae^{-2\pi^2\sigma^2x^2}$$

傅立叶变换及其反变换
因为实数。

曲线形状如右图所示：



a b
c d

FIGURE 4.9
(a) Gaussian frequency domain lowpass filter.
(b) Gaussian frequency domain highpass filter.
(c) Corresponding lowpass spatial filter.
(d) Corresponding highpass spatial filter. The masks shown are used in Chapter 3 for lowpass and highpass filtering.



图像频域滤波

- 背景知识
 - 离散傅里叶变换 (DFT)
 - 频率域滤波基础
- 图像的频域滤波
 - 频率域滤波器平滑图像
 - 频率域滤波器锐化图像

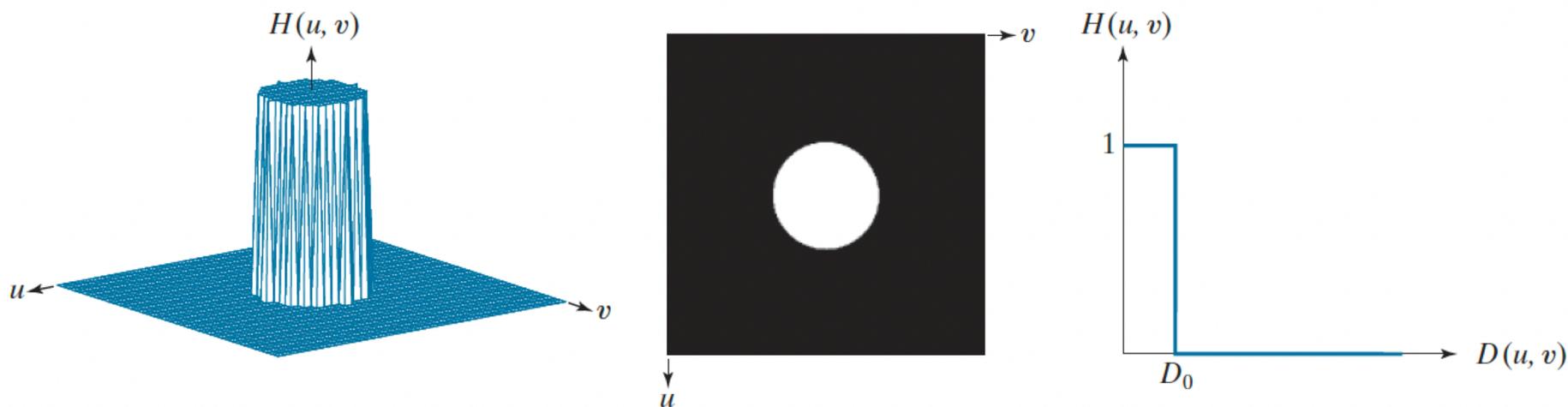


频率域滤波平滑

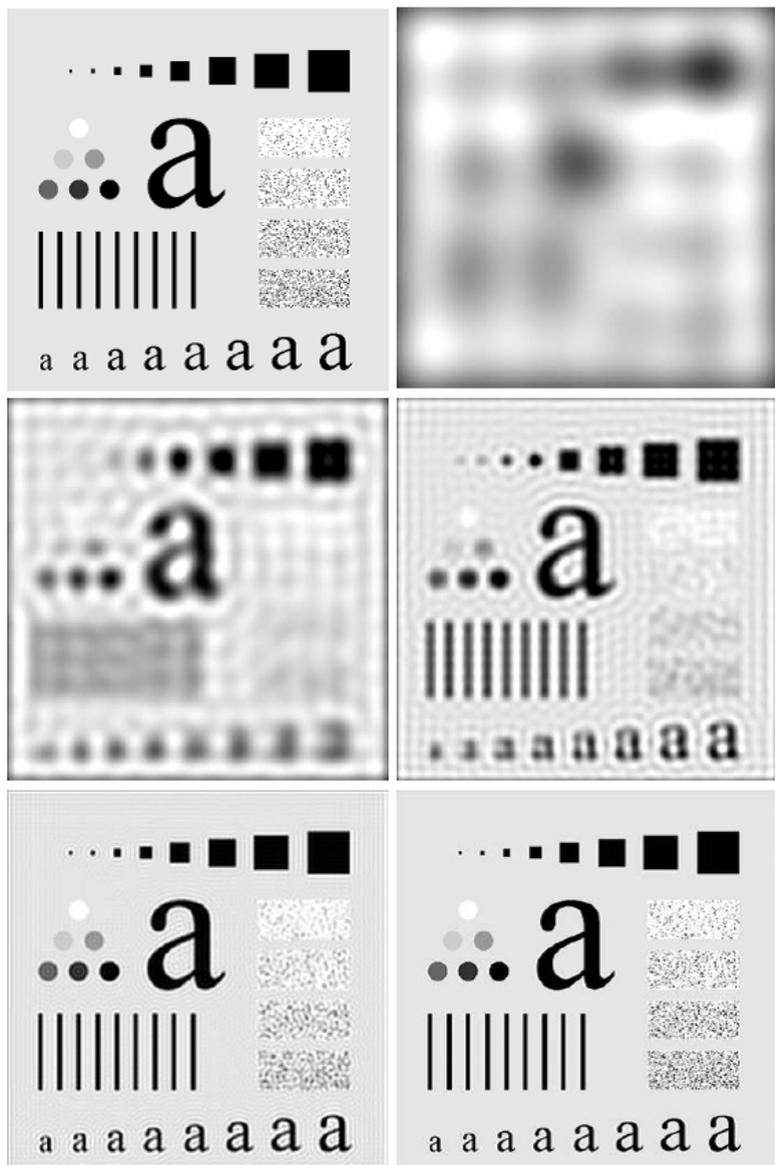
理想低通滤波器

$$H(u, v) = \begin{cases} 1, & D(u, v) \leq D_0 \\ 0, & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

其中， $D(u, v)$ 是频率域中点 (u, v) 与频率矩形中心的距离



理想低通滤波器示例



a b
c d
e f

(a) 原图
(b)-(f) 使用理想低通滤波器，截止频率设置10,30,60,160和460。这些滤波器移除的功率分别为总功率的13%，6.9%，4.3%，2.2%和0.8%。

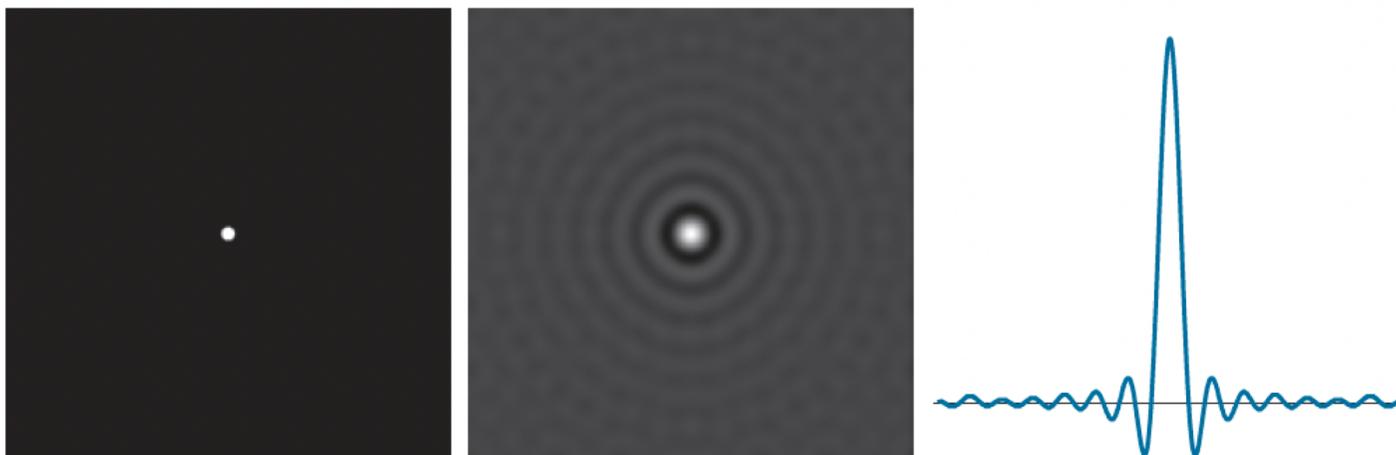
(c)(d): 振铃效应

振铃效应解释

a b c

FIGURE 4.42

- (a) Frequency domain ILPF transfer function.
- (b) Corresponding spatial domain kernel function.
- (c) Intensity profile of a horizontal line through the center of (b).

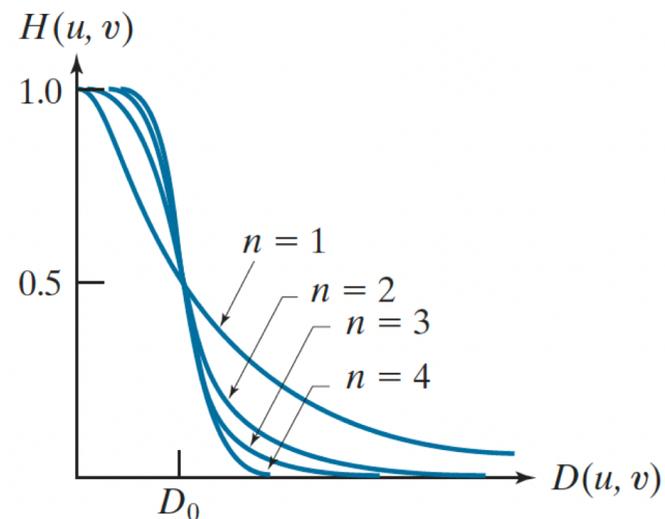
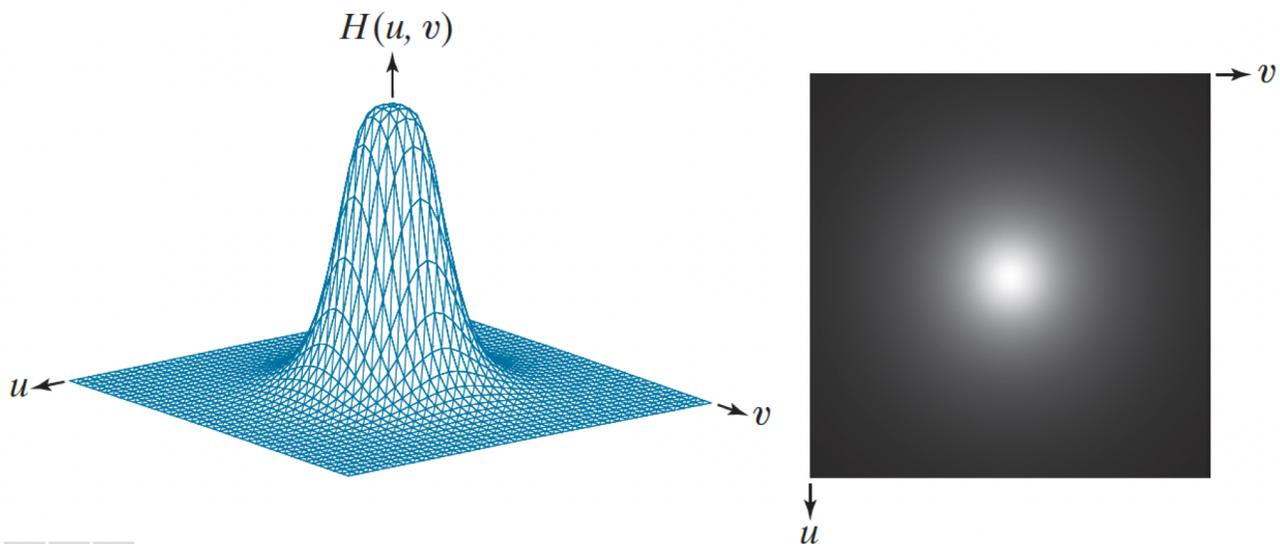




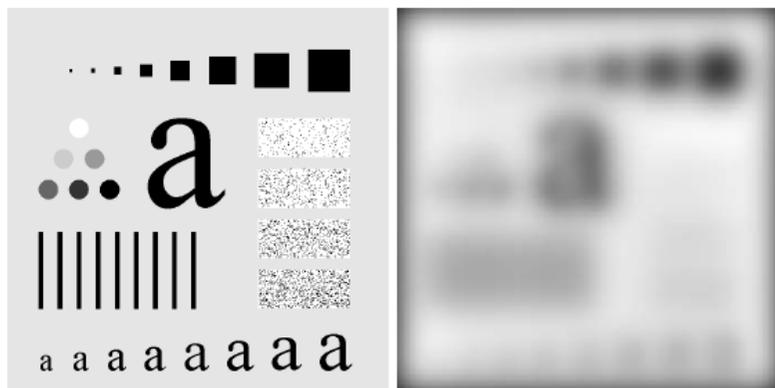
频率域滤波平滑

n 阶布特沃斯低通滤波器

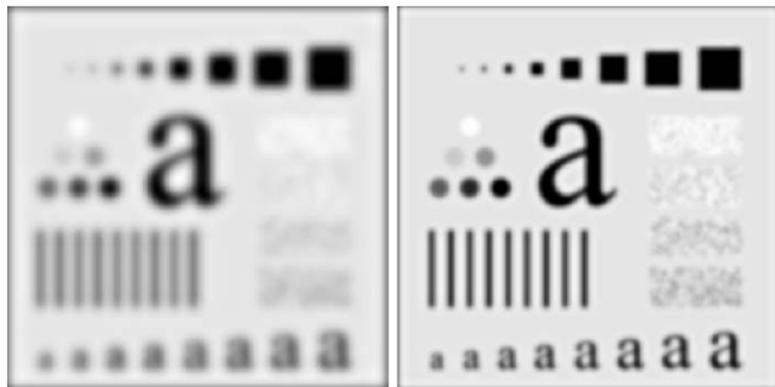
$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)}{D_0} \right]^{2n}}$$



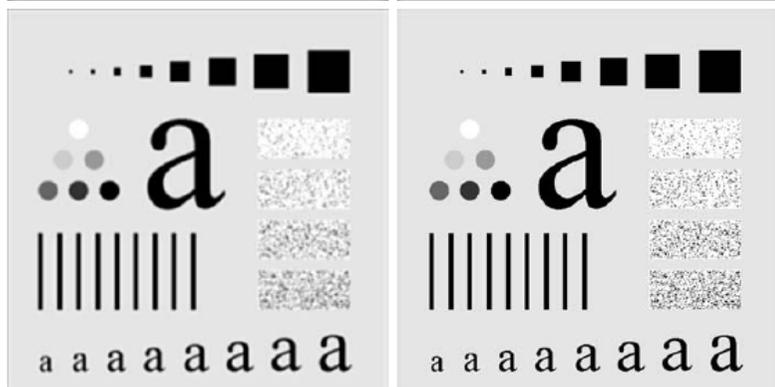
布特沃斯滤波器示例



a b
c d
e f



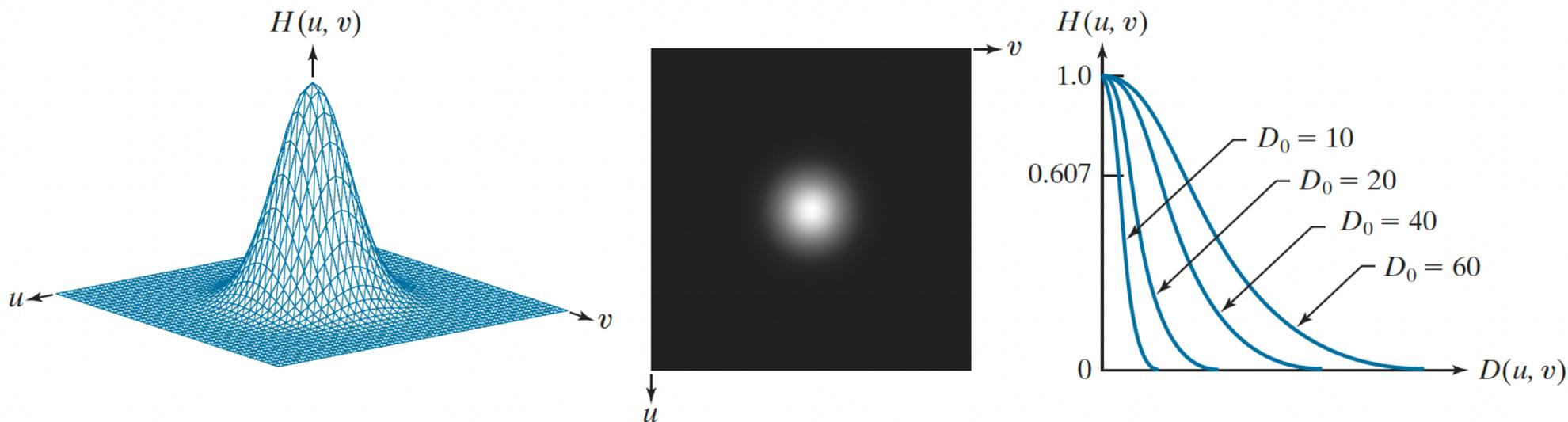
(a) 原图
(b)-(f) 使用二阶布特沃斯低通滤波器的结果，截止频率仍为10，30，60，160和460。



频率域滤波平滑

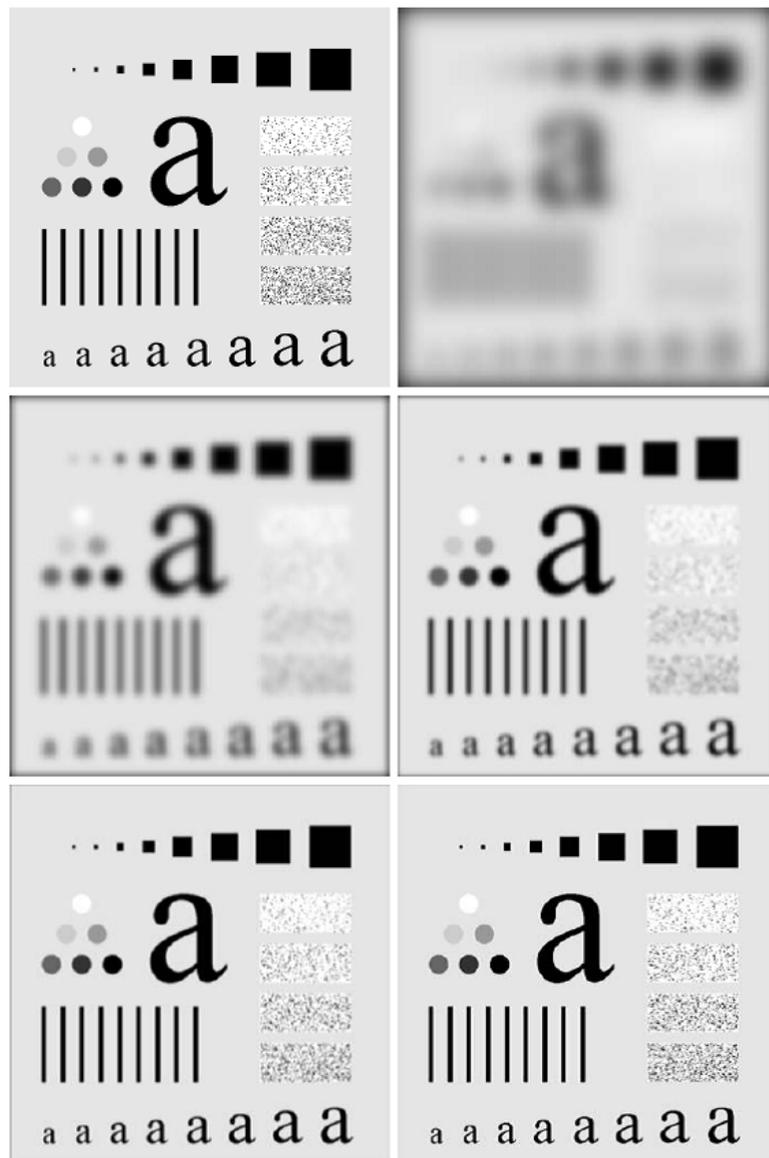
高斯低通滤波器

$$H(u, v) = e^{-\frac{D^2(u, v)}{2D_0^2}}$$



高斯低通滤波器（GLPF）的傅里叶反变换也是高斯的，因此通过上式的IDFT得到的空间高斯滤波器没有振铃。

高斯低通滤波器示例



a b
c d
e f

(a) 原图
(b)-(f) 使用高斯低通滤波器的结果，截止频率仍为10，30，60，160和460。

低通滤波的其他例子

□ 字符识别

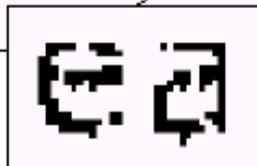
文字的断裂现象

a b

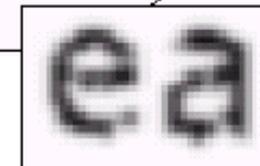
FIGURE 4.19

(a) Sample text of poor resolution (note broken characters in magnified view).
(b) Result of filtering with a GLPF (broken character segments were joined).

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



低通滤波的其他例子

□ 印刷和出版业

预处理, 美化图像



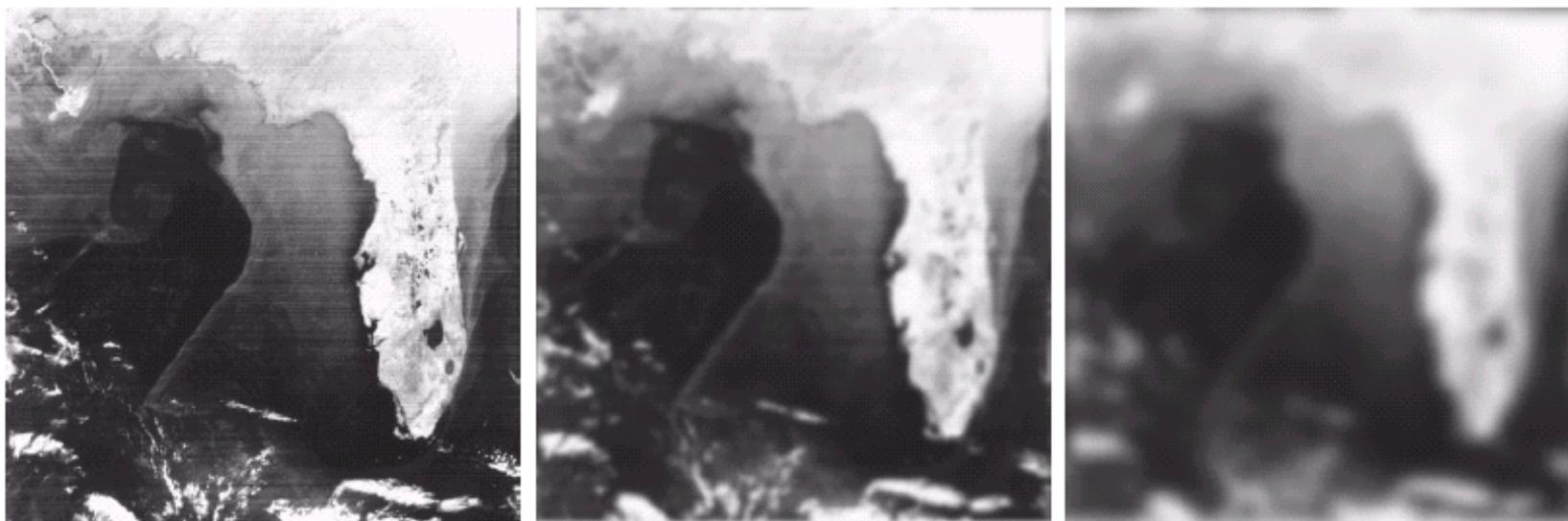
a b c

FIGURE 4.20 (a) Original image (1028×732 pixels). (b) Result of filtering with a GLPF with $D_0 = 100$. (c) Result of filtering with a GLPF with $D_0 = 80$. Note reduction in skin fine lines in the magnified sections of (b) and (c).

低通滤波的其他例子

□ 卫星和航空图像

下图：墨西哥湾和佛罗里达图像存在“扫描线”（用高斯低通来处理）



a b c

FIGURE 4.21 (a) Image showing prominent scan lines. (b) Result of using a GLPF with $D_0 = 30$. (c) Result of using a GLPF with $D_0 = 10$. (Original image courtesy of NOAA.)



图像频域滤波

□ 背景知识

- 离散傅里叶变换 (DFT)
- 频率域滤波基础

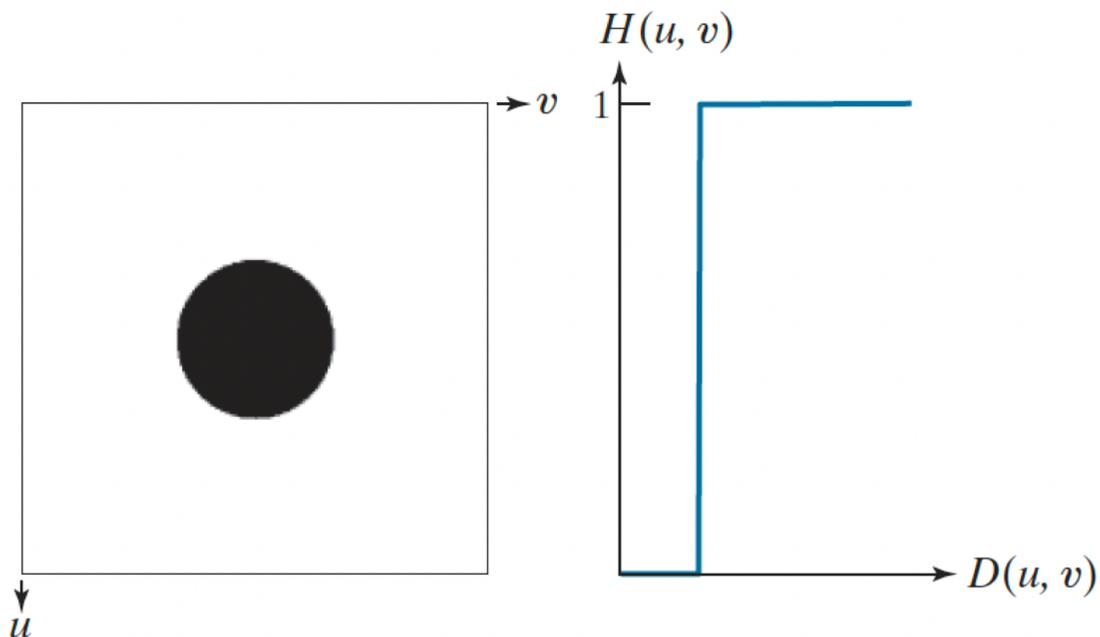
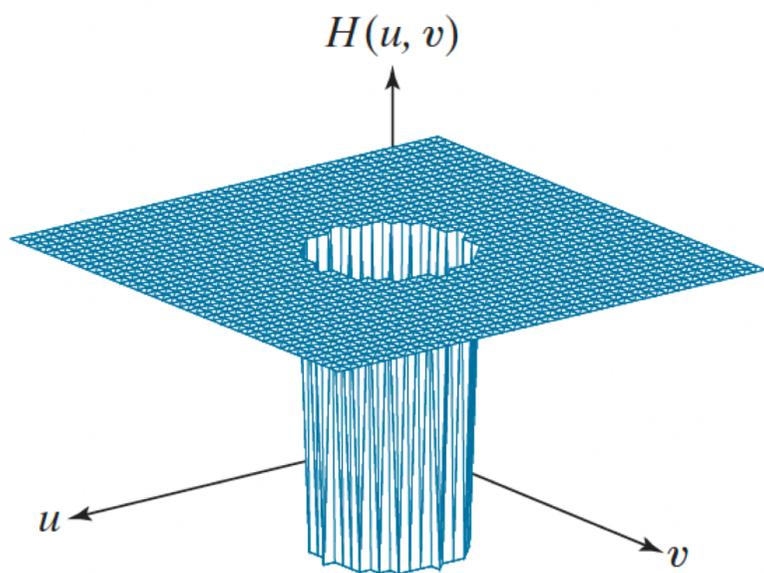
□ 图像的频域滤波

- 频率域滤波器平滑图像
- 频率域滤波器锐化图像

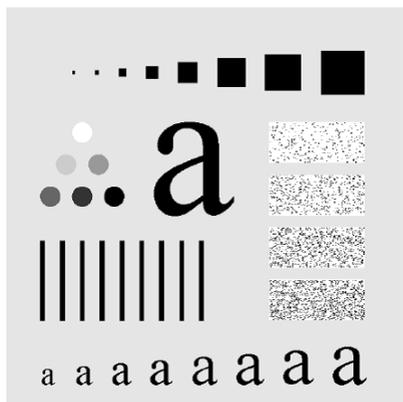
频率域滤波锐化

理想高通滤波器

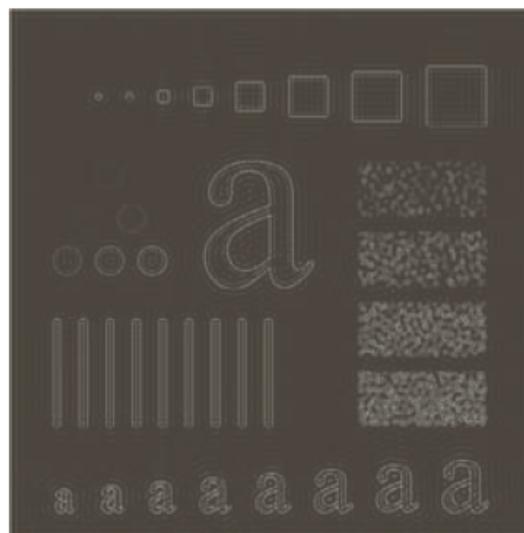
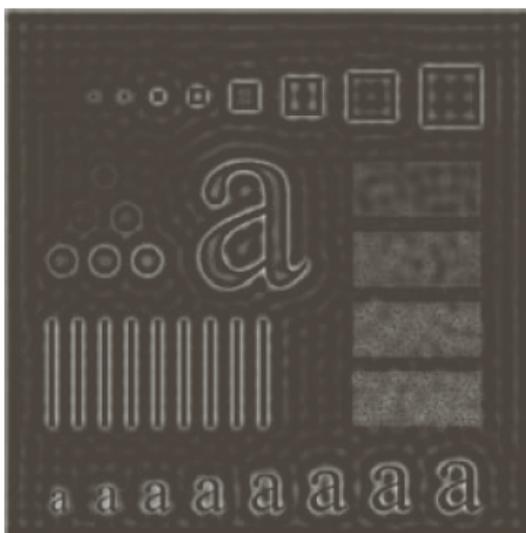
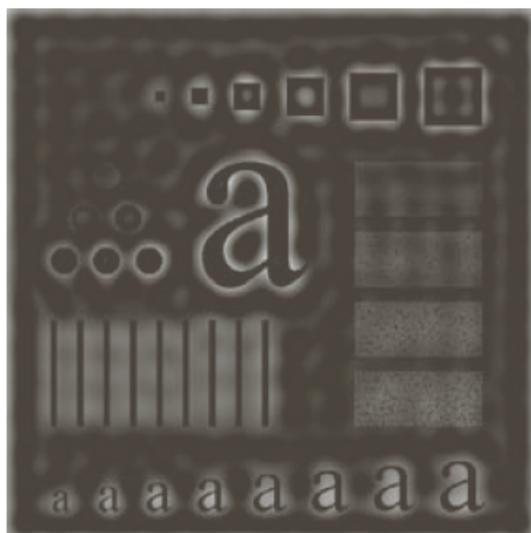
$$H(u, v) = \begin{cases} 0, & D(u, v) \leq D_0 \\ 1, & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$



理想高通滤波器示例



原图



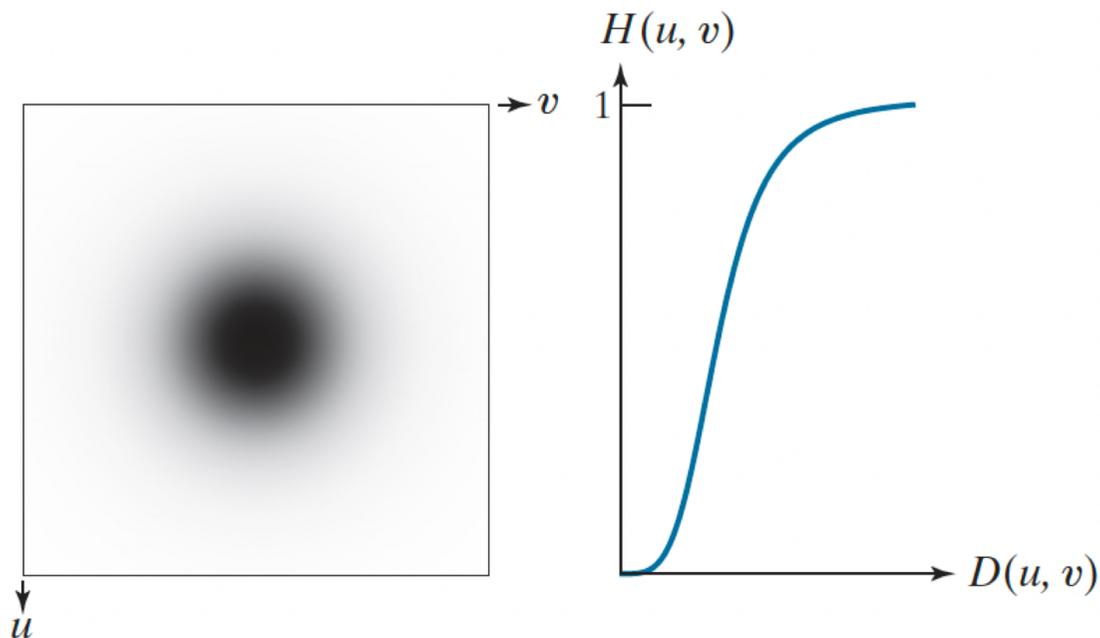
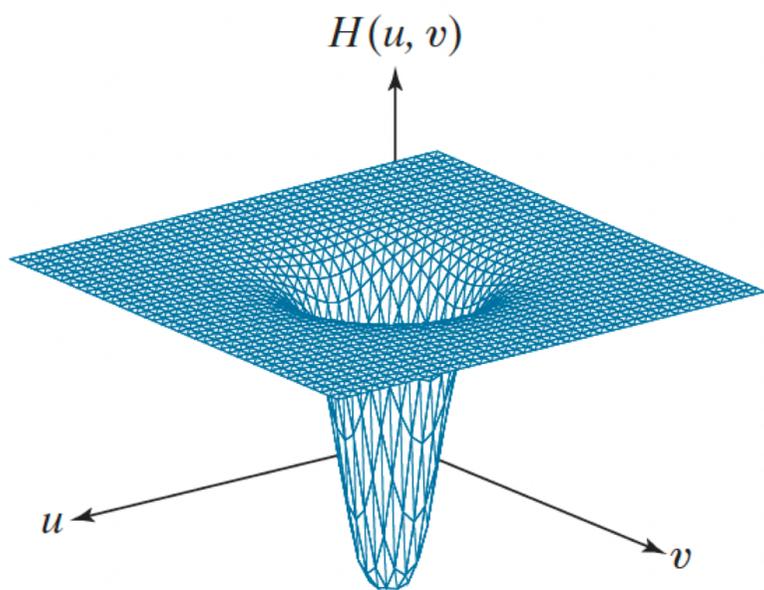
a b c

$D_0 = 30, 60, 100$ 的理想高通滤波器结果

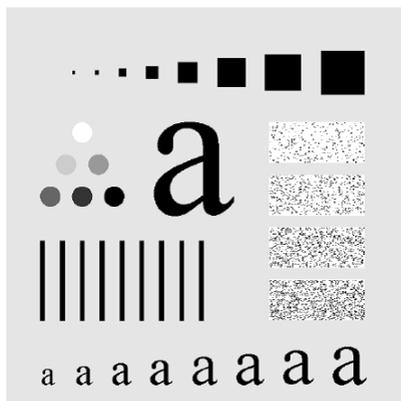
频率域滤波锐化

布特沃斯高通滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D_0}{D(u, v)} \right]^{2n}}$$



布特沃斯高通滤波器示例



原图



a b c

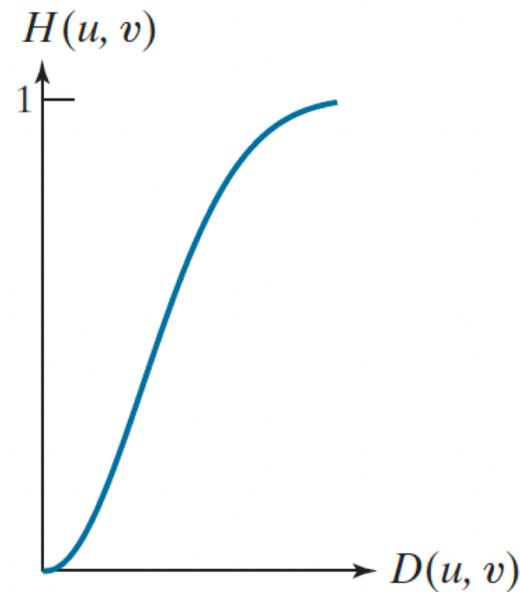
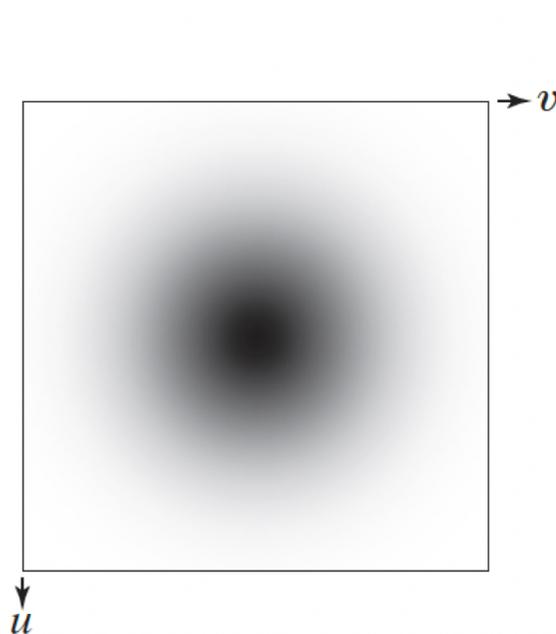
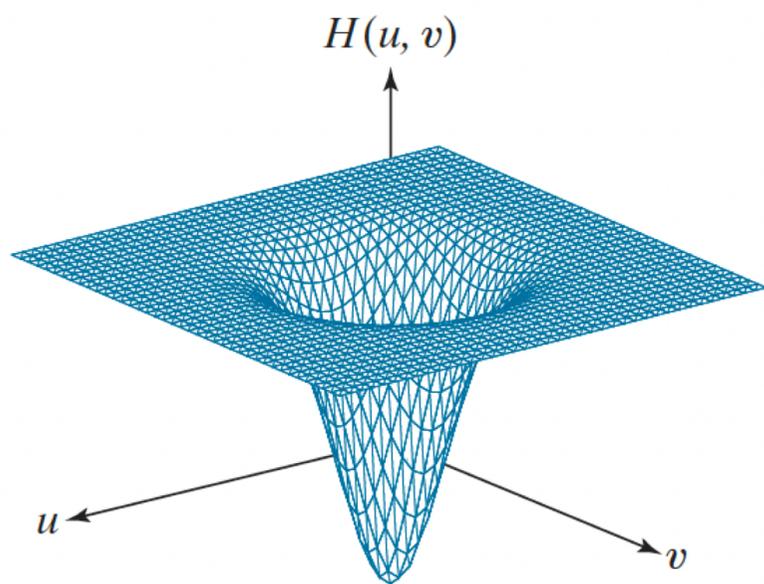
$D_0 = 30, 60, 100$ 的2阶布特沃斯高通滤波器结果



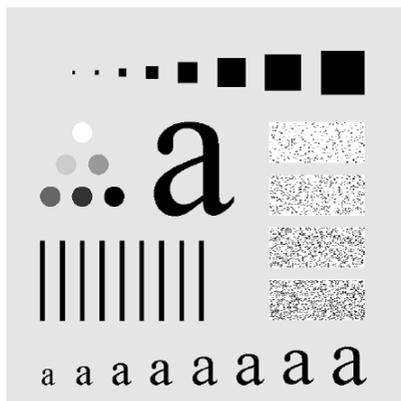
频率域滤波锐化

高斯高通滤波器

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{D^2(u, v)}{2D_0^2}}$$



高斯高通滤波器示例



原图



a b c

$D_0 = 30, 60, 100$ 的高斯高通滤波器结果



频率域滤波锐化：同态滤波

- 一幅图像 $f(x, y)$ 可以表示为照射分量和反射分量的乘积
 - $f(x, y) = i(x, y) \cdot r(x, y)$
- 然而上式不能用来直接对两部分分量分别进行操作，因为两个函数乘积的傅立叶变换是不可分的
 - $F\{f(x, y)\} \neq F\{i(x, y)\}F\{r(x, y)\}$
- 我们对图像函数两边取对数，则可以将两个分量分开
 - $z(x, y) = \ln(f(x, y)) = \ln(i(x, y)) + \ln(r(x, y))$
 - $F\{\ln(f(x, y))\} = F\{\ln(i(x, y))\} + F\{\ln(r(x, y))\}$



同态滤波步骤

- 两边取对数： $\ln(f(x, y)) = \ln(i(x, y)) + \ln(r(x, y))$
- 两边取付氏变换： $Z(u, v) = I(u, v) + R(u, v)$
- 用一频域函数 $H(u, v)$ 处理 $Z(u, v)$ ：

$$H(u, v)Z(u, v) = H(u, v)I(u, v) + H(u, v)R(u, v)$$

- 反变换到空域：

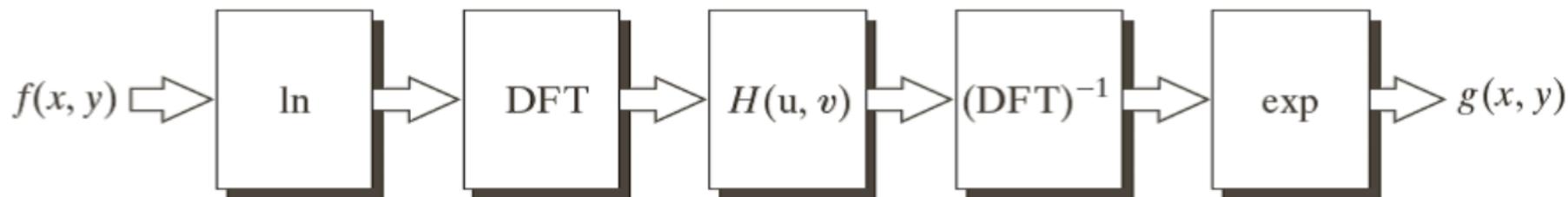
$$s(x, y) = i'(x, y) + r'(x, y)$$

- 两边取指数：

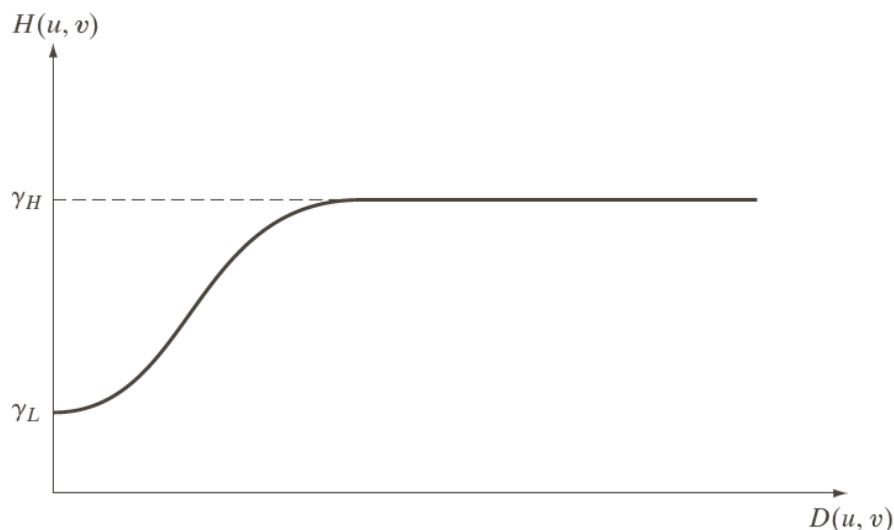
$$g(x, y) = \exp\{i'(x, y)\} \exp\{r'(x, y)\} = i_0(x, y)r_0(x, y)$$



同态滤波步骤及滤波器径向剖面图



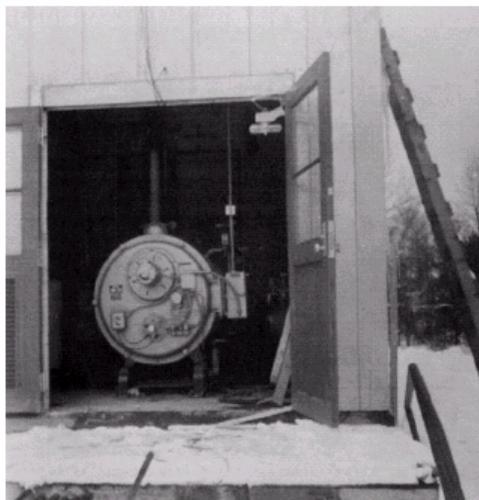
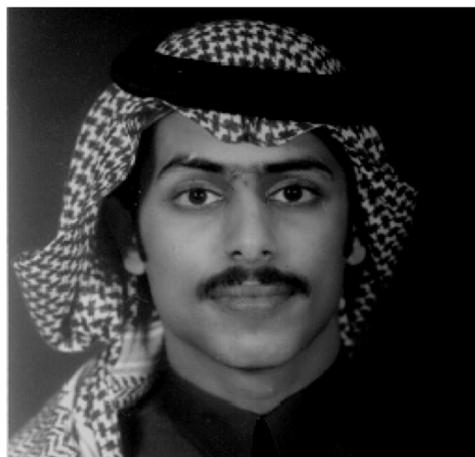
同态滤波器函数径向剖面图：滤波器函数趋向于衰减低频（照射分量）的贡献，而增强高频（反射分量）的贡献。



同态滤波示例

- **特点**：能消除乘性噪声，能同时压缩图象的整体动态范围和增加图象中相邻区域间的对比度

- 示例一：



同态滤波示例

□ 示例二

