



第三章：图像变换

中国科学技术大学
电子工程与信息科学系

主讲教师：李厚强 (lihq@ustc.edu.cn)
周文罡 (zhwg@ustc.edu.cn)
李 礼 (li11@ustc.edu.cn)
胡 洋 (eeyhu@ustc.edu.cn)



图像变换

□ 图像变换

- ✓ 可分离和正交图像变换
- ✓ 离散傅立叶变换 (DFT)
- ✓ 离散余弦变换 (DCT)
- ✓ 沃尔什/哈达玛变换
- ✓ Karhunen-Loeve变换 (KLT)
- ✓ 小波变换 (DWT)



可分离和正交图象变换

□ 1-D变换

■ 正变换

$$T(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x)h(x,u) \quad u = 0, 1, \dots, N-1$$

正向变换核

■ 反变换

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} T(u)k(x,u) \quad x = 0, 1, \dots, N-1$$

反向变换核



可分离和正交图象变换

□ 2-D变换

$$T(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)h(x, y, u, v) \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} T(u, v)k(x, y, u, v) \quad (2)$$

正向变换核

变换核与
原始函数及
变换后函数无关

反向变换核



可分离和正交图象变换

□ 可分离

$$h(x, y, u, v) = h_1(x, u)h_2(y, v)$$

1个2-D变换分成2个1-D变换

$$T(x, v) = \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)h_2(y, v) \quad T(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} T(x, v)h_1(x, u)$$

□ 对称

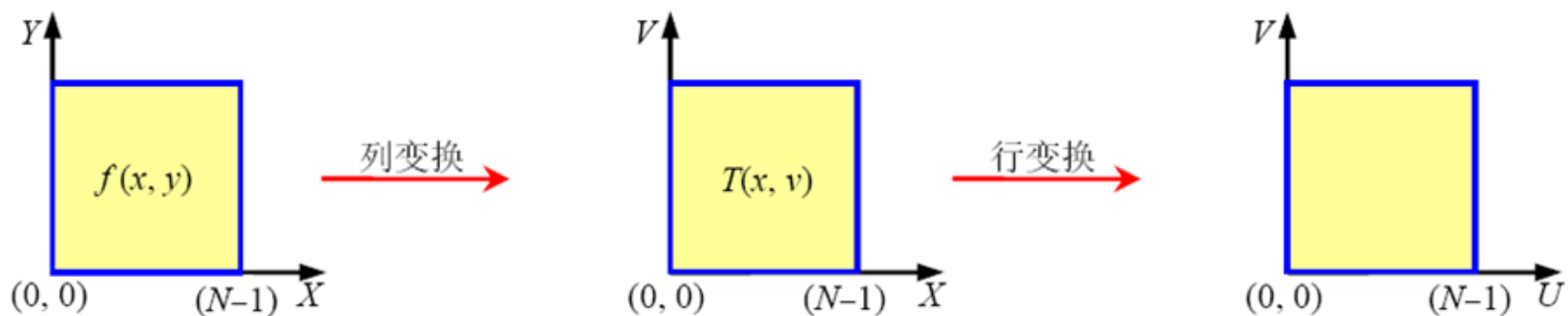
$$h(x, y, u, v) = h_1(x, u)h_1(y, v)$$

(h_1 与 h_2 的函数形式一样)



可分离和正交图象变换

- 具有可分离变换核的2-D变换可以分成两个步骤计算，每个步骤用一个1-D变换

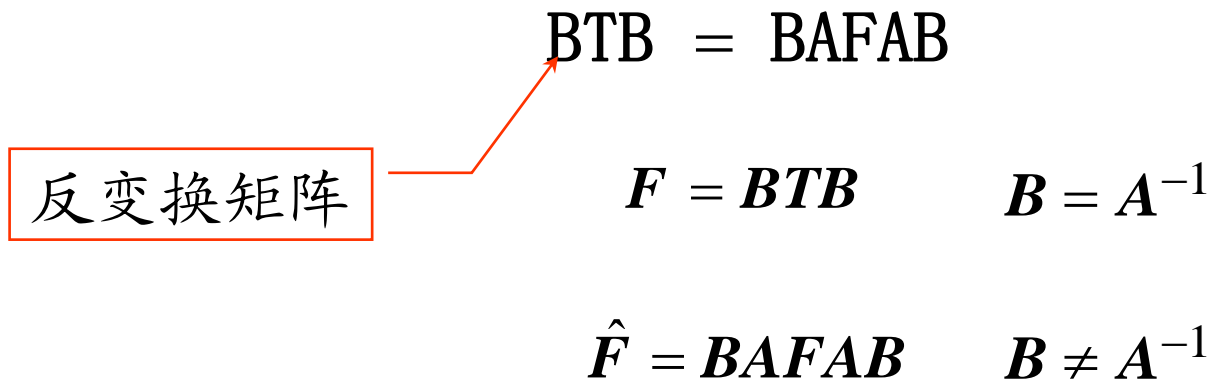
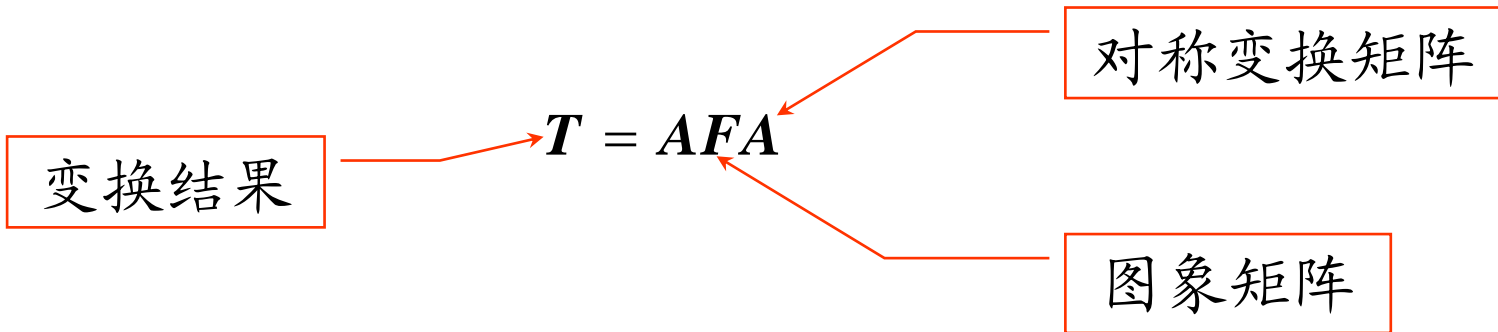


由 2 步 1-D 变换计算 2-D 变换



可分离和正交图象变换

□ 可分离且对称





可分离和正交图象变换

□ 正交

考虑变换矩阵： $B = A^{-1}$ $F = BTB$

酉矩阵（*代表共轭）： $A^{-1} = A^{*T}$

如果A为实矩阵，且： $A^{-1} = A^T$

则A为正交矩阵，构成正交变换对



离散傅立叶变换 (DFT)

□ 二维离散傅立叶变换式

- 对于 $N \times N$ 的二维矩阵（方阵），二维离散傅立叶变换对为：

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp\left\{\frac{-2\pi j(ux + vy)}{N}\right\}$$

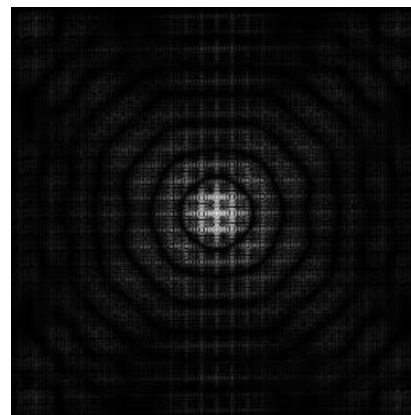
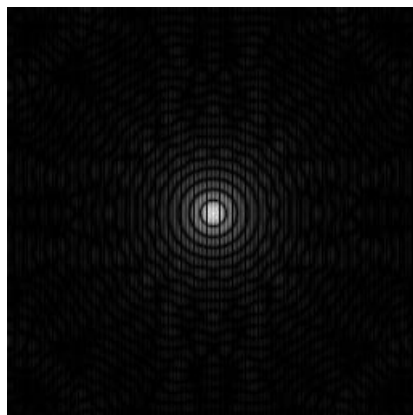
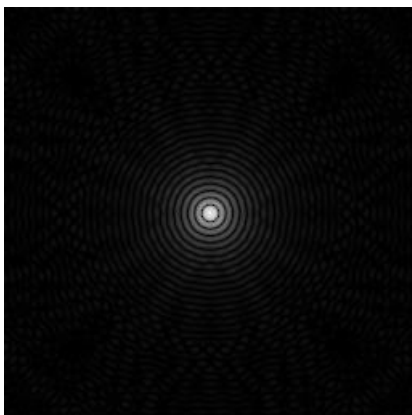
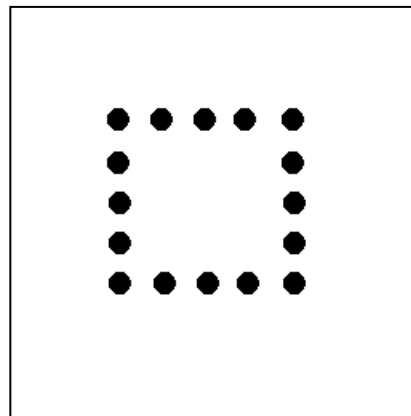
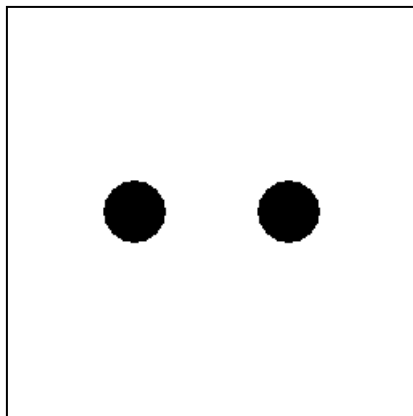
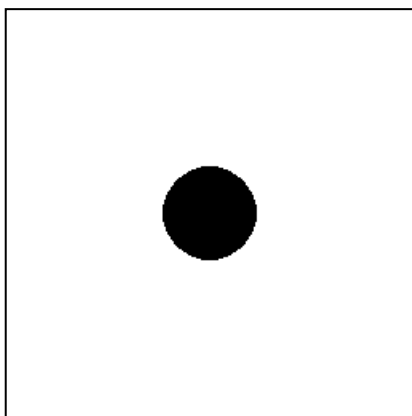
$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp\left\{\frac{+2\pi j(ux + vy)}{N}\right\}$$



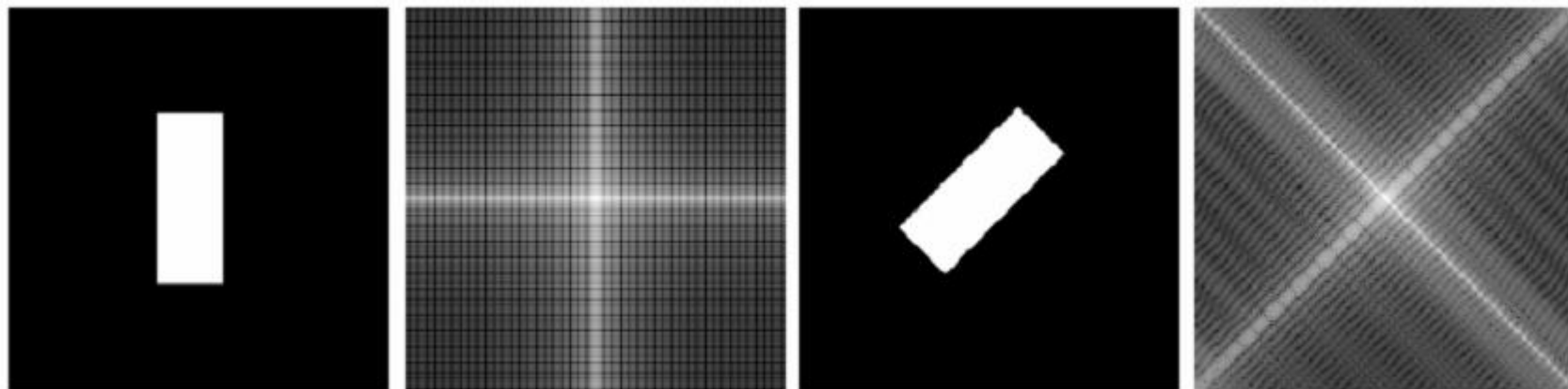
二维DFT的性质

- 线性 $f_1(x, y) + f_2(x, y)$ $F_1(u, v) + F_2(u, v)$
- 比例 $f(ax, by)$ $\frac{1}{ab} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$
- 平移 $f(x - a, y - b)$ $e^{-j2\pi(au+bv)} F(u, v)$
 $e^{j2\pi(cx+dy)} f(x, y)$ $F(u - c, v - d)$
- 卷积 $f_1(x, y) * f_2(x, y)$ $F_1(u, v)F_2(u, v)$
 $f_1(x, y)f_2(x, y)$ $F_1(u, v) * F_2(u, v)$
- 旋转 $f(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta)$
 $F(u \cos \theta + v \sin \theta, -u \sin \theta + v \cos \theta)$

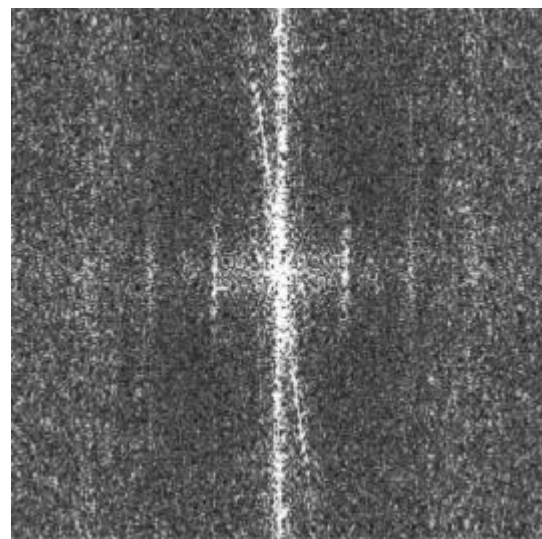
线性叠加及尺度变化



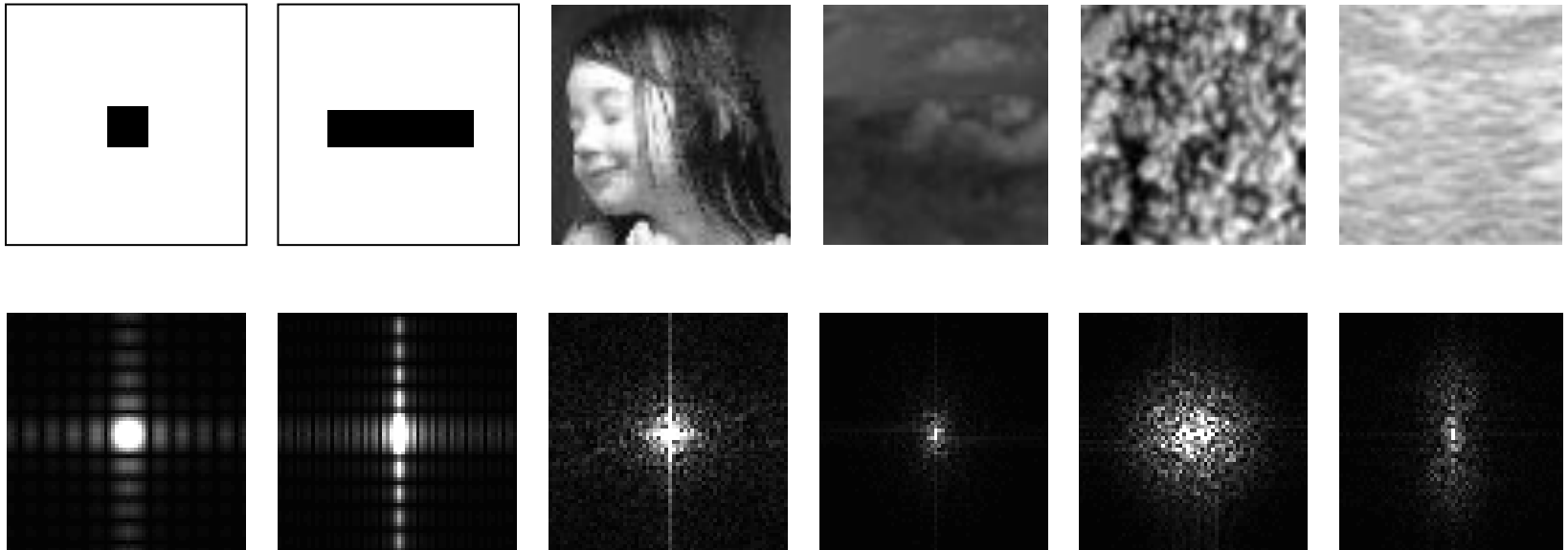
旋转性



实例



典型图象的频谱





离散余弦变换 (DCT)

- 一种可分离、正交、对称的变换
- 1-D离散余弦变换

$$C(u) = a(u) \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos \left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N} \right] \quad u = 0, 1, \dots, N-1$$

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} a(u) C(u) \cos \left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N} \right] \quad x = 0, 1, \dots, N-1$$

$$a(u) = \begin{cases} \sqrt{1/N} & \text{当 } u = 0 \\ \sqrt{2/N} & \text{当 } u = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$



离散余弦变换 (DCT)

□ 2-D离散余弦变换

$$C(u, v) = a(u)a(v) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos \left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N} \right] \cos \left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N} \right]$$

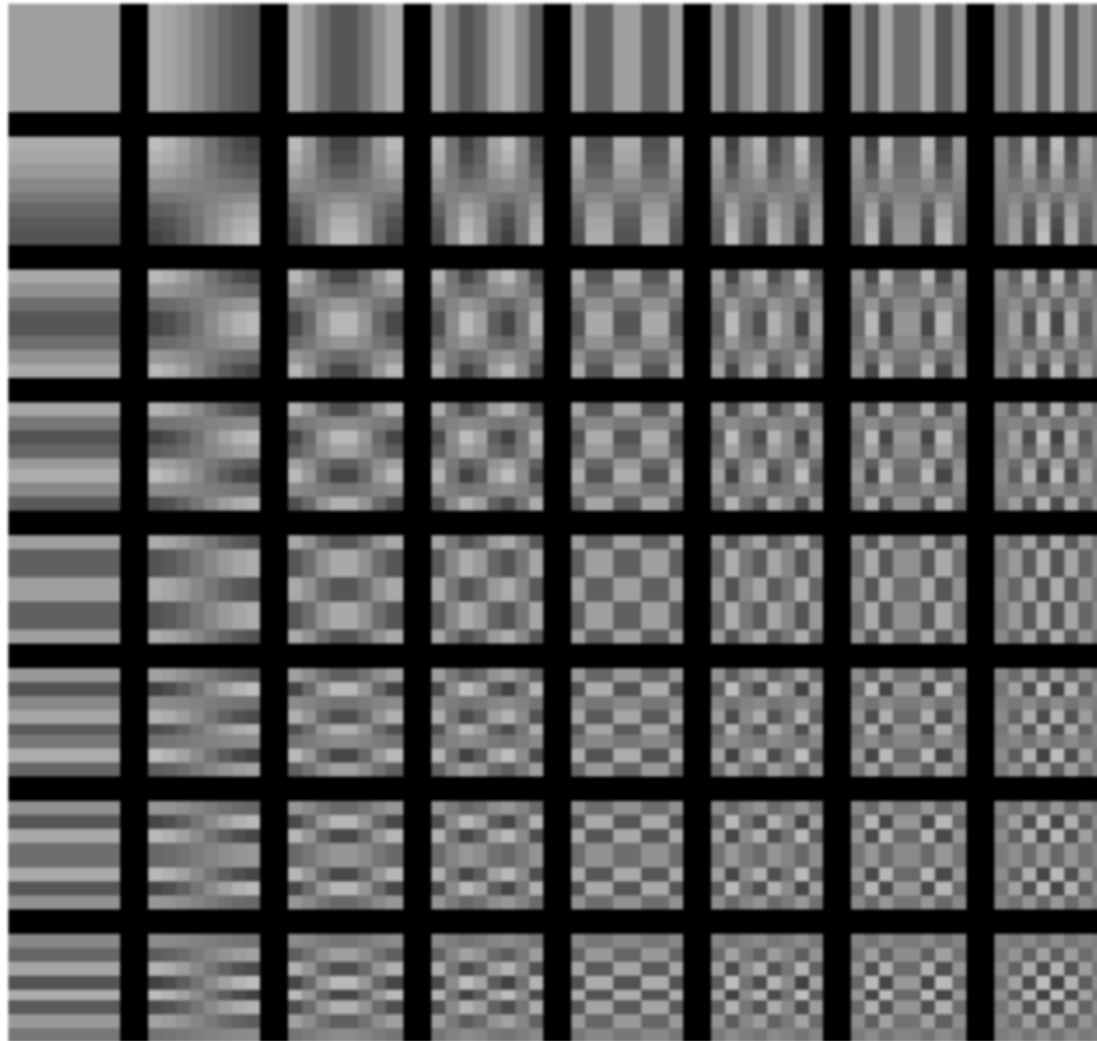
$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} a(u)a(v) C(u, v) \cos \left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N} \right] \cos \left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N} \right]$$

讨论可分离性和对称性

$$h(x, y, u, v) = h_1(x, u)h_2(y, v) \quad h(x, y, u, v) = h_1(x, u)h_1(y, v)$$



DCT基函数





DCT的性质

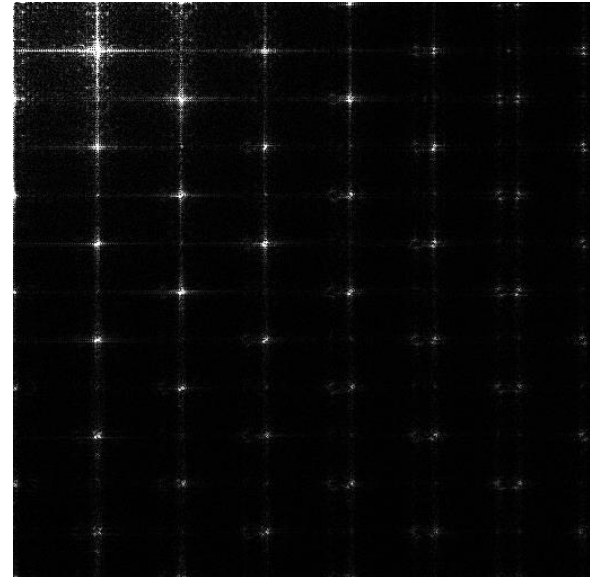
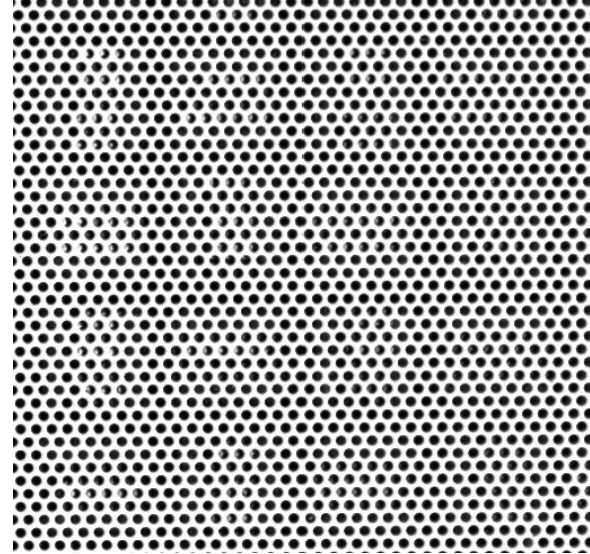
- 实规范正交基
 - 基向量模长为1
- 与DFT的关系
 - DCT对应实偶函数的DFT
- 有快速算法
 - 比如类似FFT的算法
 - 如果计算某一个特定频率，还有其他更快的方式
- 能量压缩
 - 应用于JPEG压缩编码



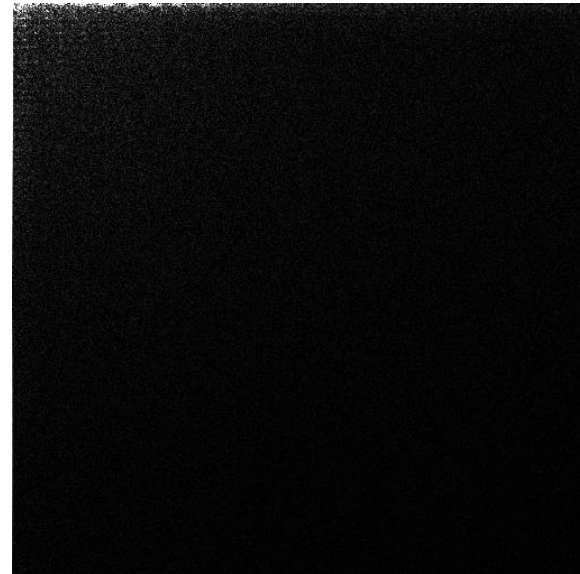
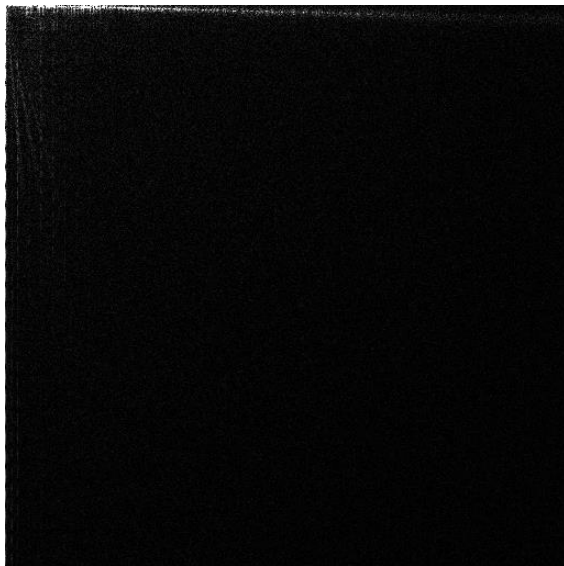
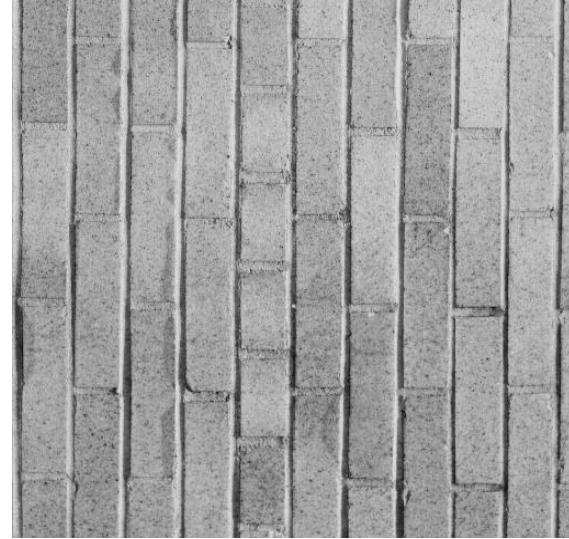
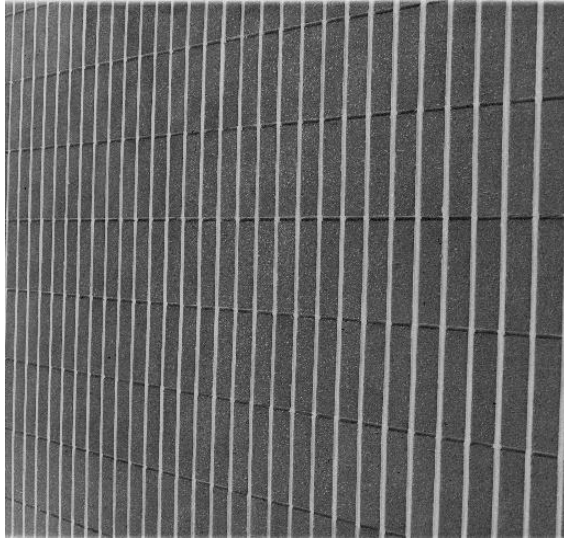
DCT变换结果示例



DCT变换结果示例



DCT变换结果示例





沃尔什/哈达玛变换

- 沃尔什（Walsh）/哈达玛变换，其基函数与DFT和DCT不同，不是正弦形的，而是方波的各种变形
- 在这类变换中，哈达玛（Hadamard）变换在图象处理中应用比较广泛
- 运算简单，只需加减运算
- 缺乏明确物理意义和较直观的解释



哈达玛变换的递推式

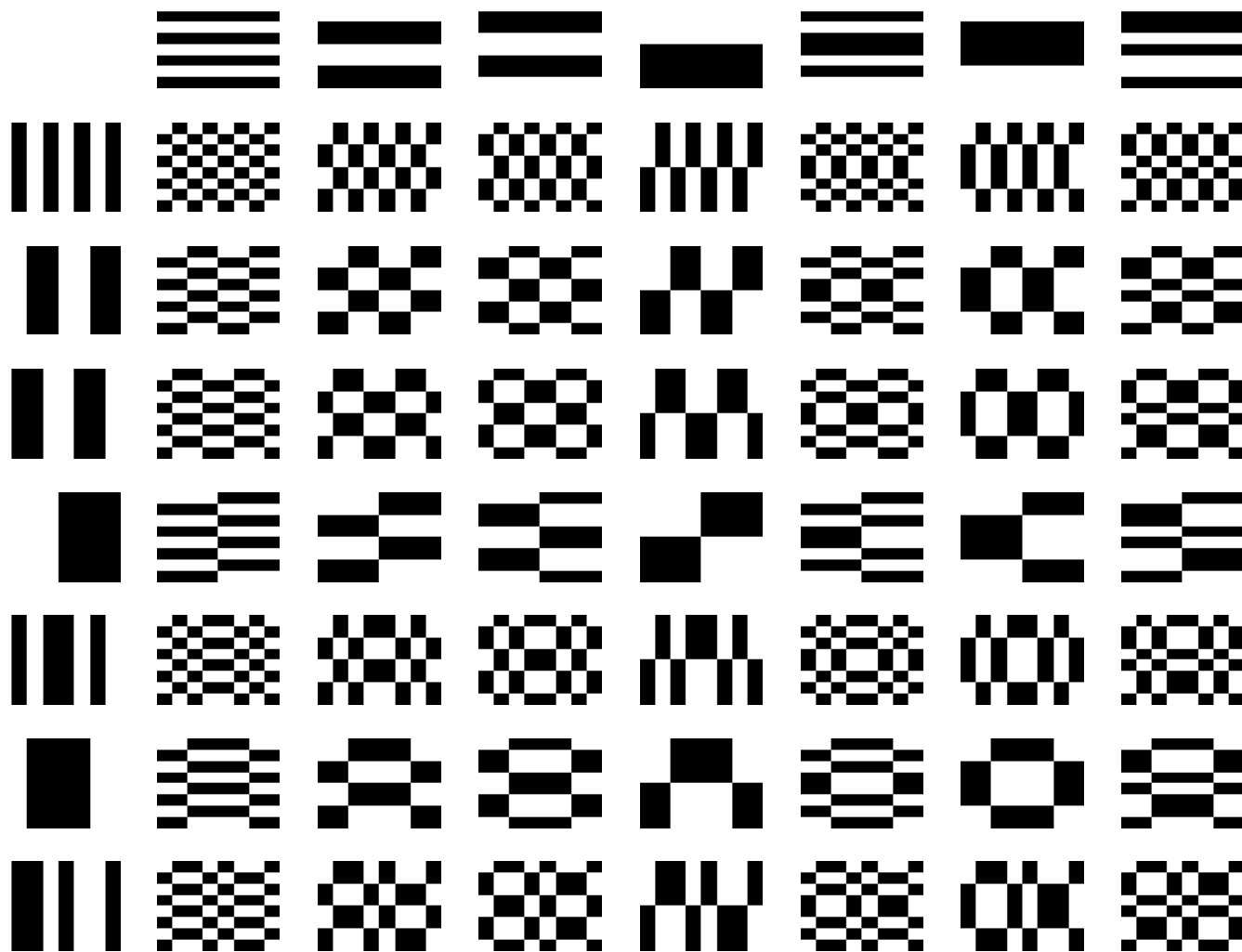
□ $2^k \times 2^k$ 哈达玛递推式：

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_{2N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H_N & H_N \\ H_N & -H_N \end{bmatrix}$$

沃尔什/哈达玛变换

基图
象





Karhunen-Loeve变换 (PCA)

- 优化目标：我们希望原始数据变换后的表达在每个维度上不存在（线性）相关性，因为相关性意味着数据的不同维度间不完全独立，就必然存在重复表示的信息。即：**数据不同维度的协方差为0**
- 我们希望由新的基所得到的数据表达的协方差矩阵中，除对角线上的方差元素外，其余所有的协方差元素全部为0（矩阵对角化）。



协方差矩阵及优化目标

□ 设原始数据为M个N维向量，首先将数据每个维度减去各自维度的均值，使每个维度的均值都变为0，记为矩阵X（每一列对应一个样本向量）

□ 基变换矩阵记为矩阵P，则基变换后的数据可以记为：

$$Y = PX$$

□ 显然，Y每个维度的均值也为0。因此Y的协方差矩阵为：

$$\begin{aligned} D_Y &= \frac{1}{M} Y Y^T \\ &= \frac{1}{M} (PX)(PX)^T \\ &= \frac{1}{M} P X X^T P^T \\ &= P \left(\frac{1}{M} X X^T \right) P^T \\ &= P D_X P^T \end{aligned}$$

目标变换矩阵P：
能让原始数据协
方差矩阵对角化



协方差矩阵及优化目标

- 我们知道：
 - 协方差矩阵 D_X 是一个实对称矩阵
 - 实对称矩阵不同特征值对应的特征向量必然正交
 - 特征向量构成的变换矩阵可以使协方差矩阵对角化

- P 是协方差矩阵 D_X 的特征向量单位化后按行排列出的矩阵，其中每一行都是 D_X 的一个特征向量

- 如果 P 按照特征值从大到小，将特征向量从上到下排列，则用 P 的前 k 行组成的矩阵乘以原始数据矩阵 X ，就得到了我们需要的降维后的数据矩阵 Y



算法步骤

原始数据为M个N维向量：

1. 将原始数据按列组成N行M列的矩阵X；
2. 将X的每一行（每个维度）进行零均值化；
3. 求出协方差矩阵 $D_X = \frac{1}{M} X X^T$ ；
4. 求出 D_X 的特征值及对应的特征向量；
5. 将特征向量按对应特征值大小从上到下按行排列成矩阵，取前k行组成矩阵P；
6. $Y = PX$ 即为降维到k维后的数据。

K-L变换一例(1)

图象点序列:

(1, 1), (1, 2),

(2, 1), (2, 2), (2, 3),

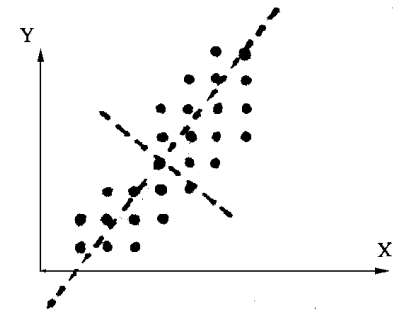
(3, 1), (3, 2), (3, 3),

(4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),

(5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (5, 7),

(6, 4), (6, 5), (6, 6), (6, 7), (6, 8),

(7, 5), (7, 6), (7, 7), (7, 8)



均值
$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.4 \\ 4.3 \end{bmatrix}$$

协方差
$$\Sigma_x = E \left\{ \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \bar{x} & y - \bar{y} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 3.286 & 3.099 \\ 3.099 & 4.579 \end{bmatrix}$$



K-L变换一例(2)

- 在维数小时，由本征多项式为零求协方差矩阵的本征值：

$$\begin{bmatrix} 3.268 - \lambda & 3.099 \\ 3.099 & 4.579 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 7.865\lambda + 5.443 = 0$$

$$\lambda_1 = 7.098 \quad \lambda_2 = 0.768$$

- 再把本征值代入 $\Sigma_X \vec{\phi}_i = \lambda_i \vec{\phi}_i$ ，求出特征矢量：

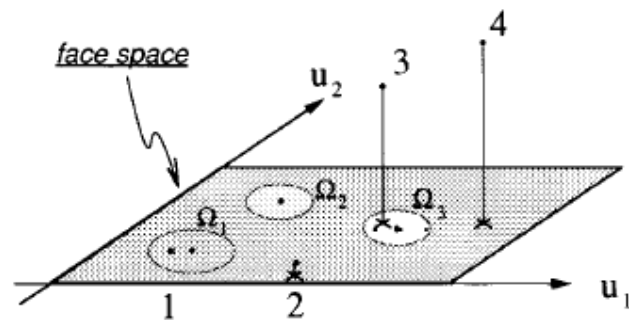
$$\vec{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.23 \end{bmatrix} \quad \vec{\phi}_2 = \begin{bmatrix} -1.23 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 把相互垂直的二特征矢量作为新的坐标，新坐标的主轴方向为所变换数据方差最大的方向



K-L变换应用实例 —— 人脸识别

1. 把每一幅人脸列化，视为随机向量 F 的不同实现。
2. 估计 F 协方差矩阵 C ，并计算其特征值特征向量。
(C 是半正定矩阵，维数不大于图像数，对应不同特征值的特征向量正交，特征脸)
3. 选择对应少量最大特征值的特征向量组成特征脸空间
4. 每张脸映射为特征脸空间的点，以其坐标作为特征向量。
5. 采用模式识别方法，进行分类识别。
(如欧式距离)

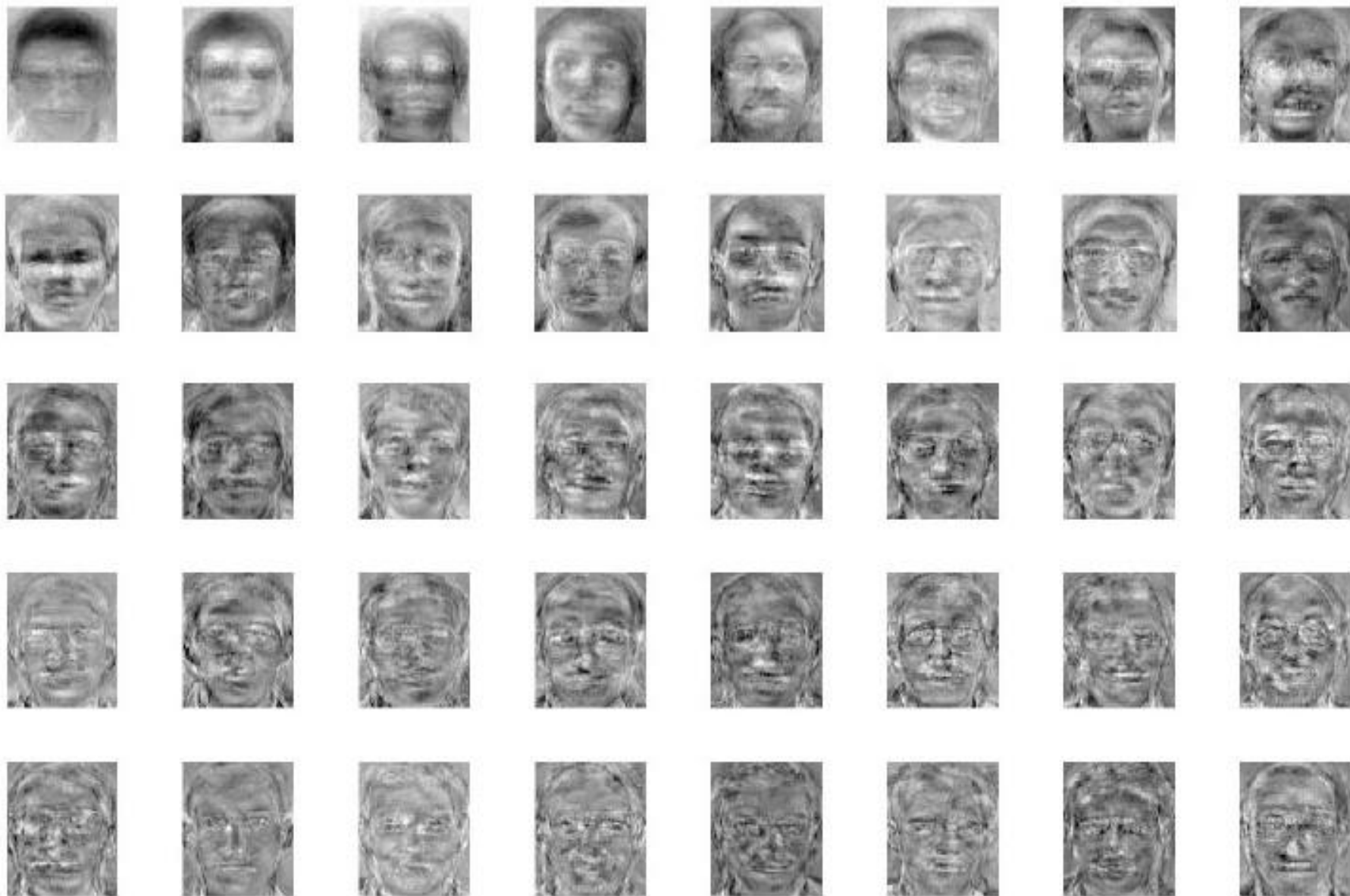




人脸库



特征脸





特征脸空间 (top 8)





小波变换 (DWT)

□ 傅立叶变换

- 变换之后丢掉了时域信息
- 无法定位相应的频率峰值的位置

□ 时频域分析

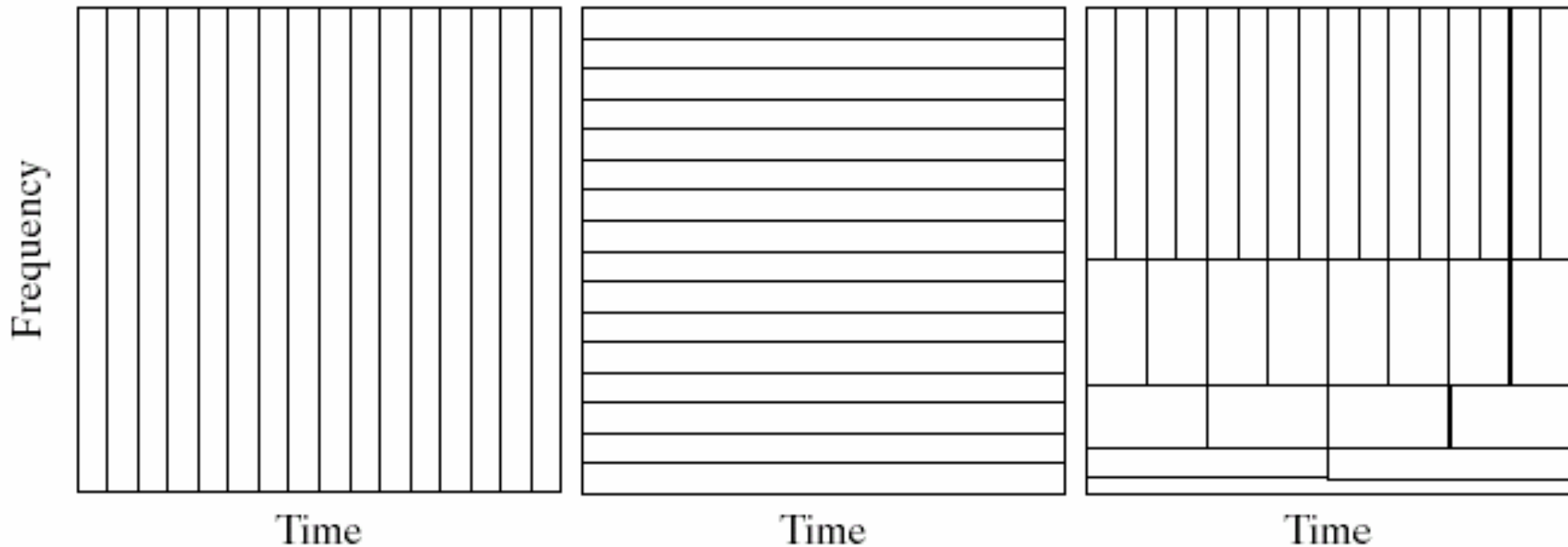
- 小波变换在二维**时频空间**分析信号

□ 变换

- 理想的基本小波是过程很短的振荡函数
- 如同傅立叶变换有连续、离散的变换，小波也有连续、离散的变换

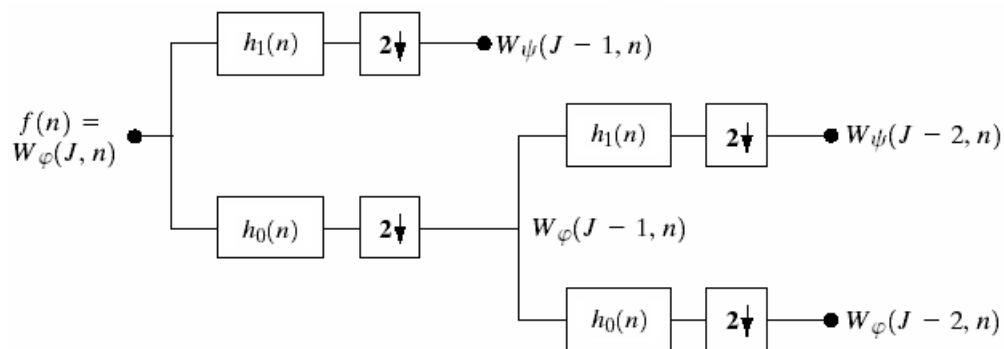
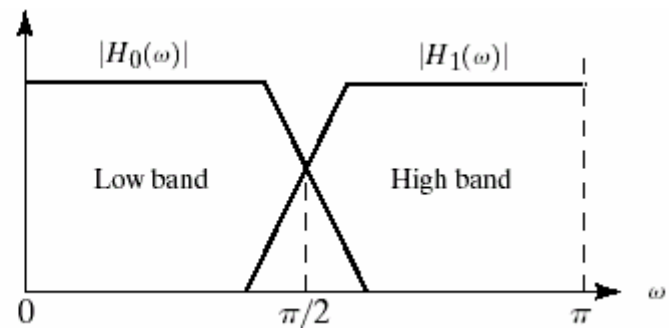
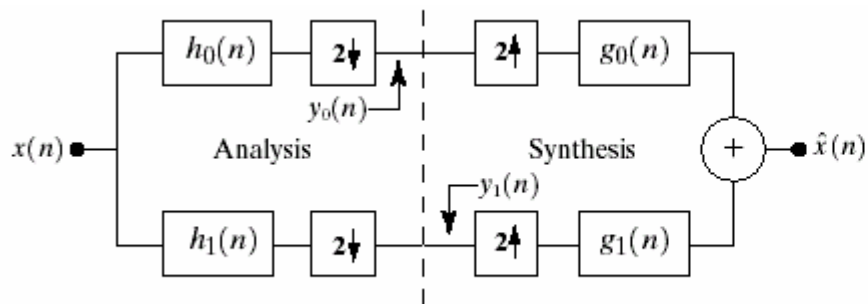


1维离散小波变换

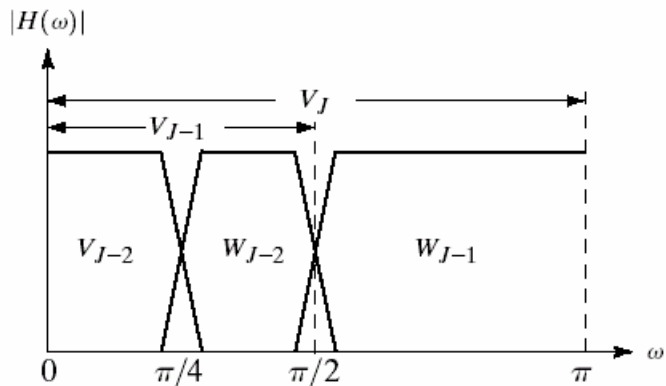


时频铺叠（从左到右：Dirac、Fourier、wavelet）

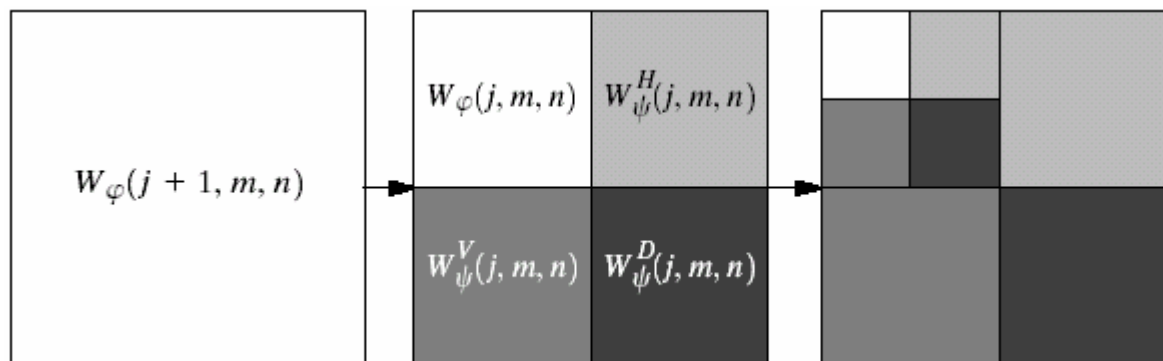
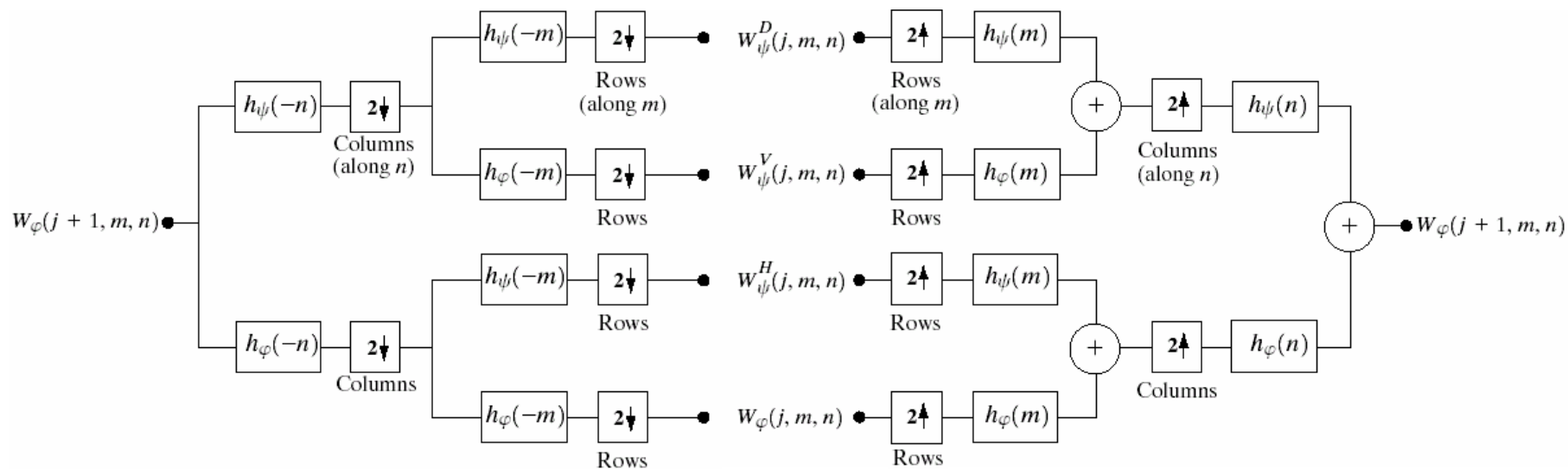
1维离散小波变换



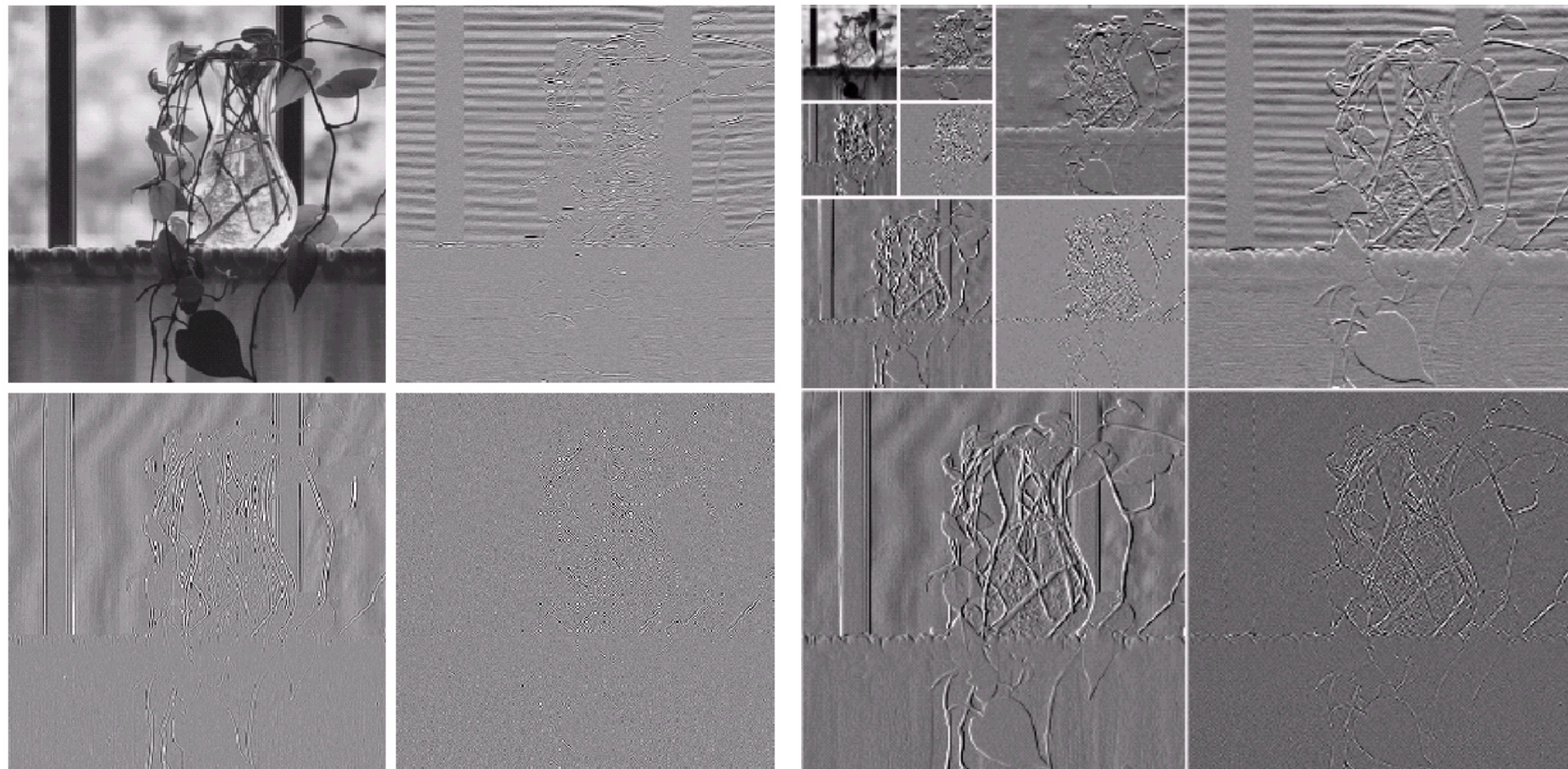
对低频进行
进一步分解



2维离散小波变换

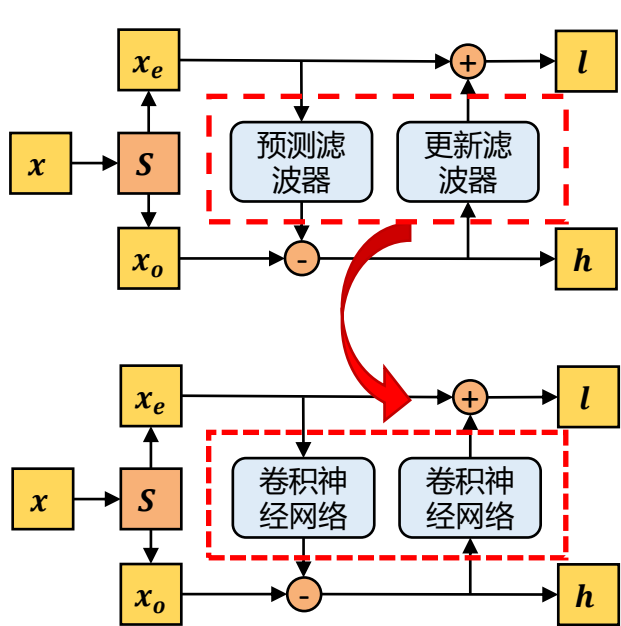


实例

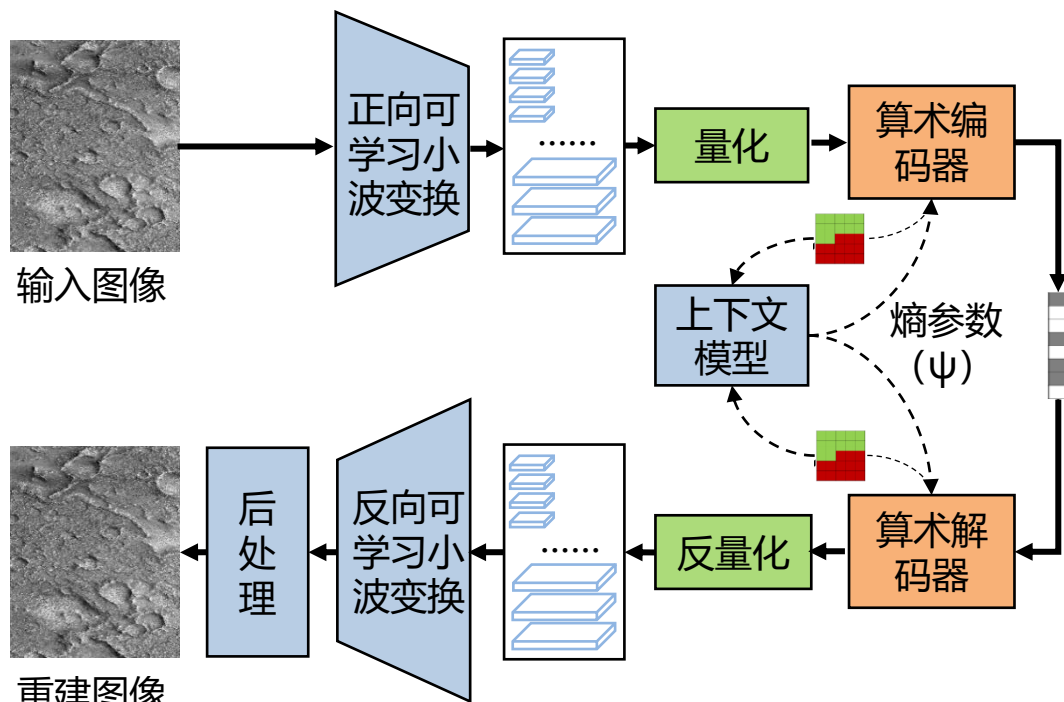


可学习类小波变换

- 将传统小波提升结构中的算子替换为非线性神经网络，建立可学习类小波变换的端到端图像编码框架



传统小波（上）和可学习小波（下）



类小波变换端到端编码框架